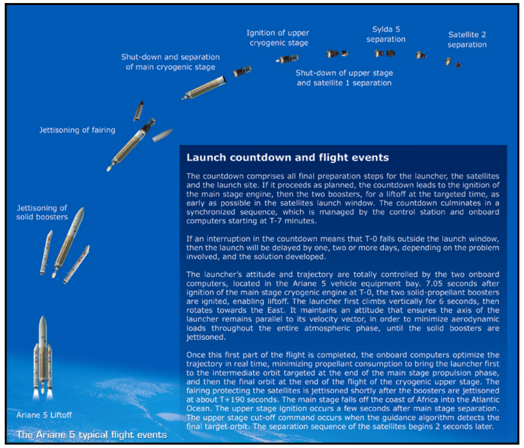
Strukturberechnung

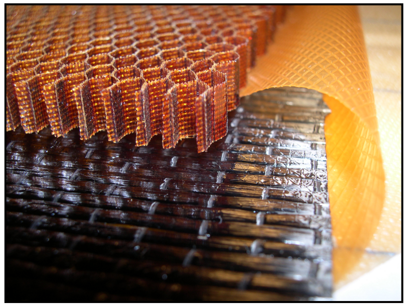
an Raumfahrtträgern

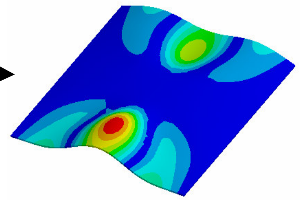
Thomas Ranz

Inhalt

- Motivation
- Raketengleichung
- Massenverhältnisse
- Missionsprofil
- Lasten
- Materialien
- Strukturen
- Simulation und Ausblick







Ziel

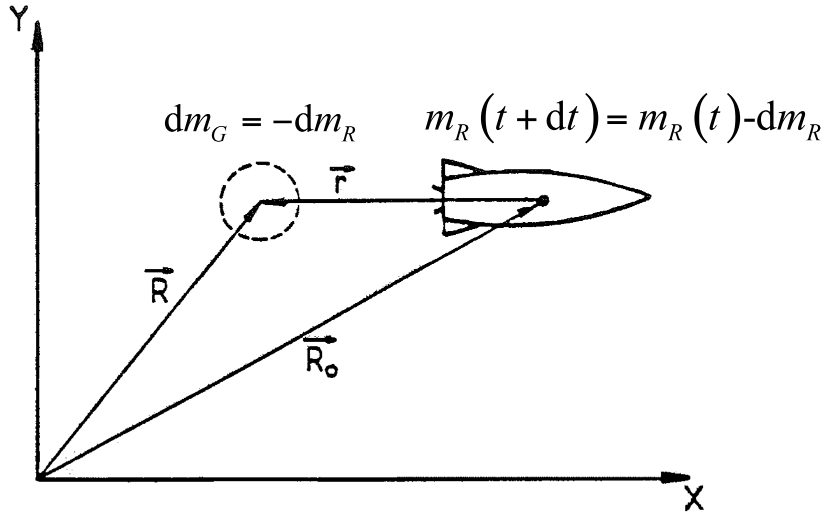
- **Strukturoptimierung an Raumfahrtträgern**

Schritte

- **Lastenanalyse**
  (statisch, dynamisch)
- **Wahl des Materials und der Strukturanalyse**
  (optimierter Materialeinsatz, analytische – numerische Lösungsverfahren)
- **Simulation und Verifikation**
  (Strukturberechnung und Ergebniskontrolle)

Raketengleichung

Ziolkowski (~ 1900)



Annahmen:

keine Kräfte zufolge Schwerkraft und Luftwiderstand

$m_R(t)$... **Masse der Rakete zum Zeitpunkt *t***

$\mathbf{v}_R(t)$... **Geschwindigkeit der Rakete im Inertialsystem**

$\mathrm{d}m_R$... **Änderung der Raketenmasse im Zeitintervall d*t***

$\mathrm{d}m_G$... **ausgestoßene Gasstrahlmasse im Zeitintervall d*t***

$\mathbf{c}_e$... **Austrittgeschwindigkeit der Gasstrahlmasse (bezogen auf den Raketenkörper)**

$\mathbf{w} = \mathbf{v}_R + \mathbf{c}_e$... **Geschwindigkeit der Gasstrahlmasse im Inertialsystem**

Raketengleichung

Ziolkowski (~ 1900)

Impuls I(*t*) des Raketensystems zum Zeitpunkt *t* im Inertialsystem:

$$\mathbf{I}(t) = m_R(t) \cdot \mathbf{v}_R(t)$$

Impuls I(*t*+d*t*) des Raketensystems zum Zeitpunkt *t*+d*t* im Inertialsystem:

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(t+\mathrm{d}t) &= m_R(t+\mathrm{d}t)\mathbf{v}_R(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{d}m_G\mathbf{w} \\ &= (m_R + \mathrm{d}m_R)(\mathbf{v}_R + \mathrm{d}\mathbf{v}_R) - \mathrm{d}m_R(\mathbf{v}_R + \mathbf{c}_e)\end{aligned}$$

Impulserhaltungssatz:

$$\mathbf{I}(t) = \mathbf{I}(t+\mathrm{d}t) \quad \rightarrow \quad m_R(t)\mathbf{v}_R(t) = (m_R + \mathrm{d}m_R)(\mathbf{v}_R + \mathrm{d}\mathbf{v}_R) - \mathrm{d}m_R(\mathbf{v}_R + \mathbf{c}_e)$$

Geschwindigkeitsänderung der Rakete

$$\mathrm{d}\mathbf{v}_R = \frac{\mathrm{d}m_R}{m_R}\mathbf{c}_e \quad \rightarrow \quad \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \Delta\mathbf{v}_R = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}\mathbf{v}_R = -\mathbf{c}_e \ln\frac{m_R(t_1)}{m_R(t_2)}$$

Gesucht: größtmögliches Δ*v* für den Flug!

$$\Delta v = c_e \ln\frac{m_R(t_1)}{m_R(t_2)}$$

Massenverhältnisse der Rakete

Gesamte Raketenmasse: $m_R = m_N + m_S + m_T = m_B + m_T \equiv m_0$

$m_N \ldots$ **Nutzlastmasse (Payload)**

$m_S \ldots$ **Strukturmasse**

$m_T \ldots$ **Treibstoffmasse**

$m_B \ldots$ **Brennschlussmasse**

Definierte Verhältnisse:

Massenverhältnis $r = \dfrac{m_0}{m_B}$

Nutzlastmassenverhältnis $\lambda = \dfrac{m_N}{m_0}$

Strukturmassenverhältnis $\sigma = \dfrac{m_S}{m_0}$

Beziehungen der Massenverhältnisse

$$\frac{m_0}{m_B} \cdot \frac{m_B}{m_0} = \frac{m_0}{m_B} \cdot \frac{m_N + m_S}{m_0} = r(\lambda + \sigma) = 1 \quad \rightarrow \quad r = \frac{1}{\lambda + \sigma}$$

Strukturmasse $\sigma \Leftrightarrow \Delta v$

Massenverhältnis: $r = \frac{m_0}{m_B}$

Antriebsvermögen: $\Delta v = c_e \ln \frac{m_R(t_1)}{m_R(t_2)}$

Einfluss der Strukturmasse auf das Antriebsvermögen:

$$\Delta v = c_e \ln \frac{m_0}{m_B} = c_e \ln r = c_e \ln \frac{1}{\lambda + \sigma}$$

Erkenntnis: $> m_S \quad \rightarrow \quad > \sigma \quad \rightarrow \quad < \Delta v$

Strukturmassenverhältnisse:
(abhängig von der Raketenart/Konstruktion und den Werkstoffen)

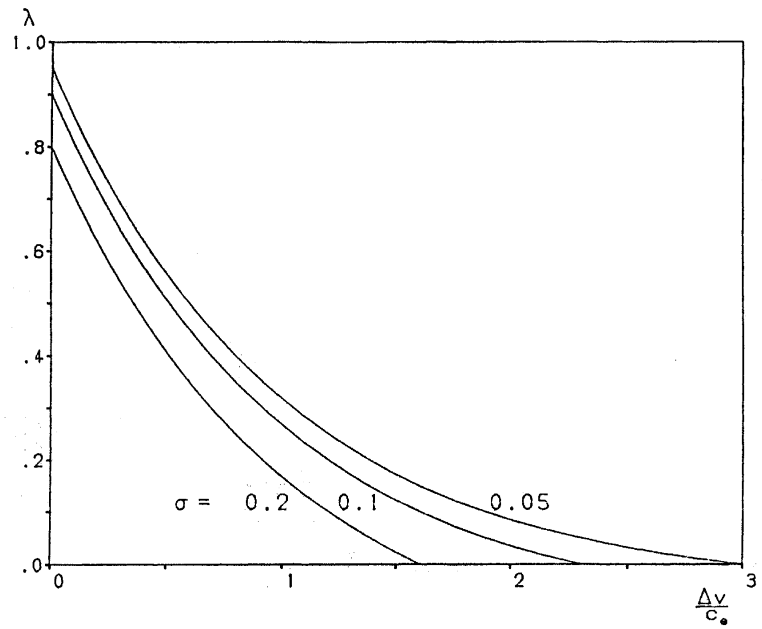
$$\sigma = 0.2 \div 0.05$$

Oberstufe $\sigma >$

Unterstufe $\sigma <$

Nutzlastmasse $\lambda \Leftrightarrow \Delta v$

Nutzlastmasseverhältnis: $\lambda = \frac{m_N}{m_0}$



Austrittsgeschwindigkeit Gasstrahl:
(Atmosphäre) $c_e \simeq 3000 \frac{m}{s}$

Keine Nutzlast:

$$\lambda \ll, \quad \sigma = 0.05 \quad \rightarrow \quad \max \frac{\Delta v}{c_e} = 3 \quad \rightarrow \quad \max \Delta v = 9000 \frac{m}{s}$$

Kreisbahngeschwindigkeit - Erde: $v_K \simeq 7900 \frac{m}{s}$

Fluchtgeschwindigkeit - Erde: $v_F \simeq 11200 \frac{m}{s}$

Nutzlasttransport => Mehrstufenprinzip in der Raumfahrt

Mehrstufenprinzip

Antriebsvermögen

Serienstufung: **Stufen arbeiten hintereinander (überwiegend Höhenforschungsraketen)**

$$\Delta v = \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i = \sum_{i=1}^{n} c_{e,i} \ln \frac{1}{\sigma_i + \frac{m_{0,i+1}}{m_{0,i}}}$$

Parallelstufung: Stufen arbeiten parallel

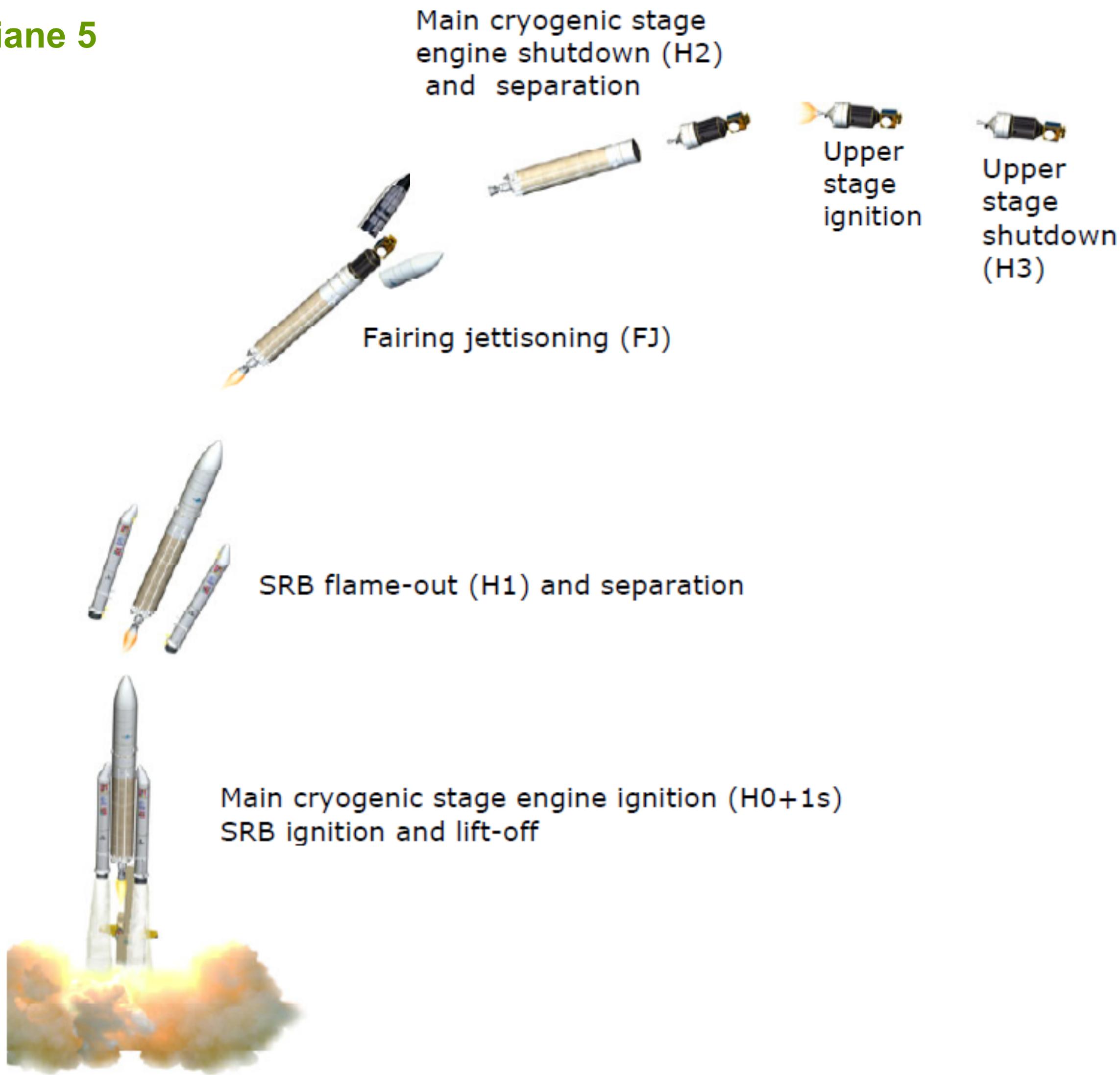
$$\Delta v = \frac{\sum_{i=1}^{n} \dot{m}_i c_{e,i}}{\sum_{i=1}^{n} \dot{m}_i} \ln \frac{1}{\lambda + \sigma}$$

Es gilt wiederum:

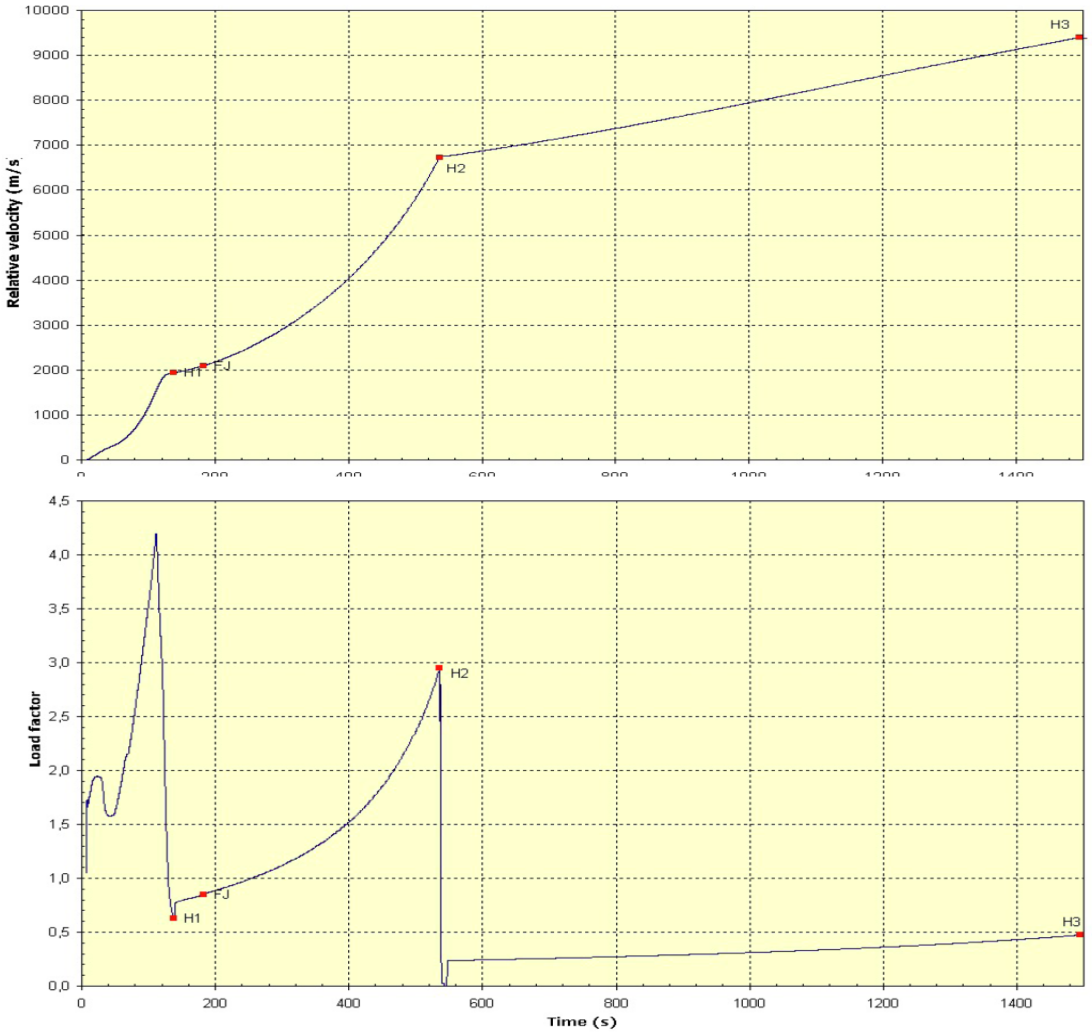
$$> m_S \quad \rightarrow \quad > \sigma \quad \rightarrow \quad < \Delta v$$

Missionsprofil Ariane 5

- Zündung der Hauptstufe (t=H0+1s)
- Zündung der Feststoffbooster (t=H0+7.05s)
- Trennung der Booster H1 (t=H0+~120s)
- Abwurf der Fairing FJ (t=H0+~180s)
- Trennung der Hauptstufe H2 (intermediate target orbit/ Zwischenzielorbit)
- Zündung Oberstufe
- Abschaltung/Trennung H3 Oberstufe (Zielorbit)
- Ausrichtung und Aktivierung der Nutzlast für die Mission

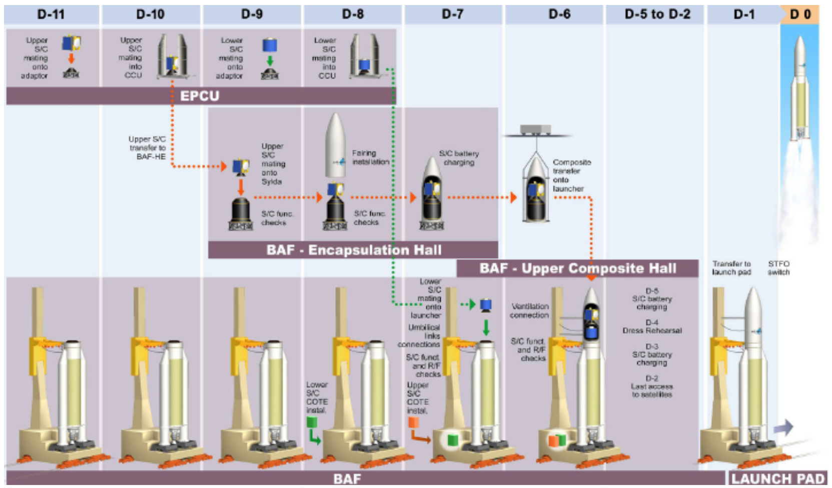


Geschwindigkeit/Beschleunigung Ariane 5 GTO



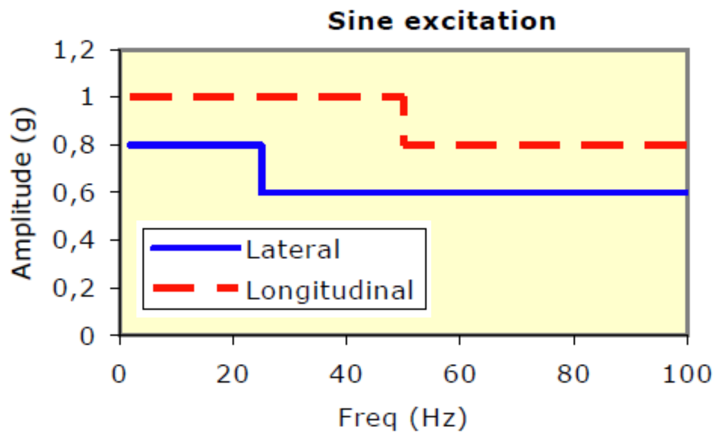
Quasi Statische Lasten Ariane 5

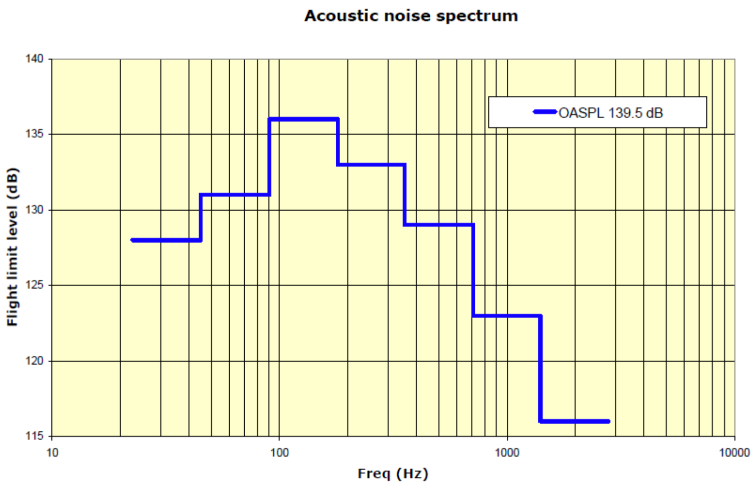
- Am Boden
  - Herstellung
  - Zusammenbau
  - Transport
  - Endmontage
- Im Flug
  - Aerodynamische Lasten
    (Wind, Böe, Flattern bei Überschallgeschwindigkeit)
  - Antriebslasten
    (Schubaufbau, Trennung)
    longitudinale Beschleunigung max 4.55g
    laterale Beschleunigung max 0.25g
- Temperaturlasten
  - Sonneneinstrahlung am Starttag
  - Temperaturdifferenzen
    (Betankung)
  - Betrieb Raketenmotor



Dynamische Lasten Ariane 5

- **Sinusäquivalente Dynamik (harmonische Anregung)**
  Niedrige Frequenzen (bis 100 Hz)
  Raketenmotor => Strukturschwingung
- **Akustische Vibrationen**
  Frequenzen (ca. 30 - 3000 Hz)
  Raketenmotor/instationäre Aero-dynamik => Druckschwankungen
- **Beliebige Anregung**
  Näherungsweise (konservativ) abgedeckt durch sinusförmige und akustische Dynamik
- **Modal-, Transiente-,Spektrumanalyse (nach Ermessen/Vorgabe)**

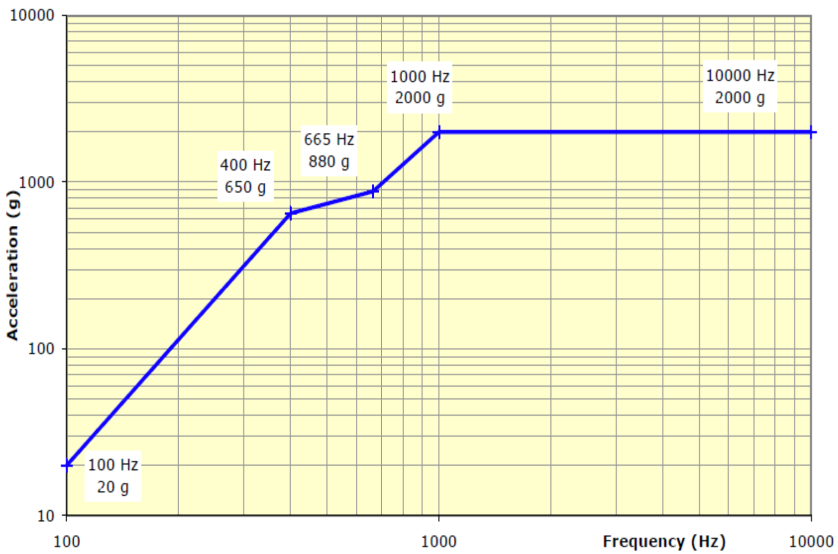




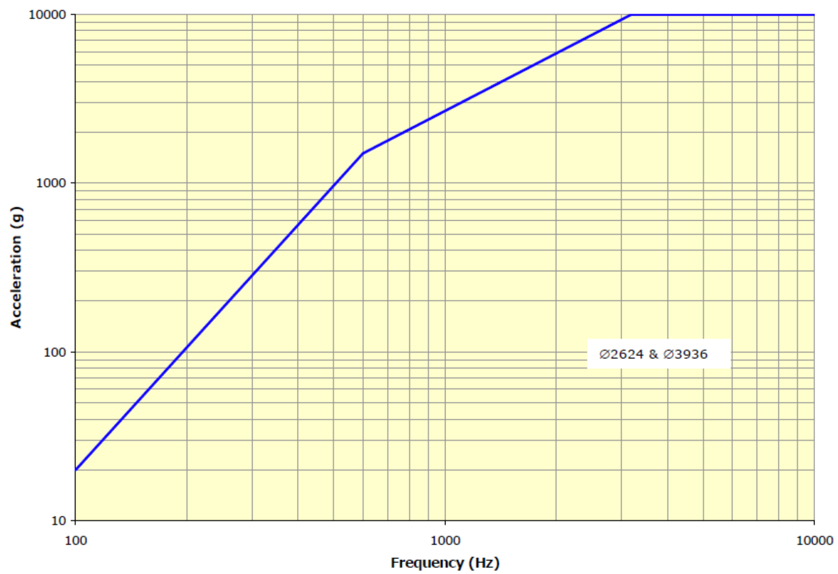
Schockwellen Ariane 5

Trennung

Booster, Fairing, Hauptstufe, Oberstufe



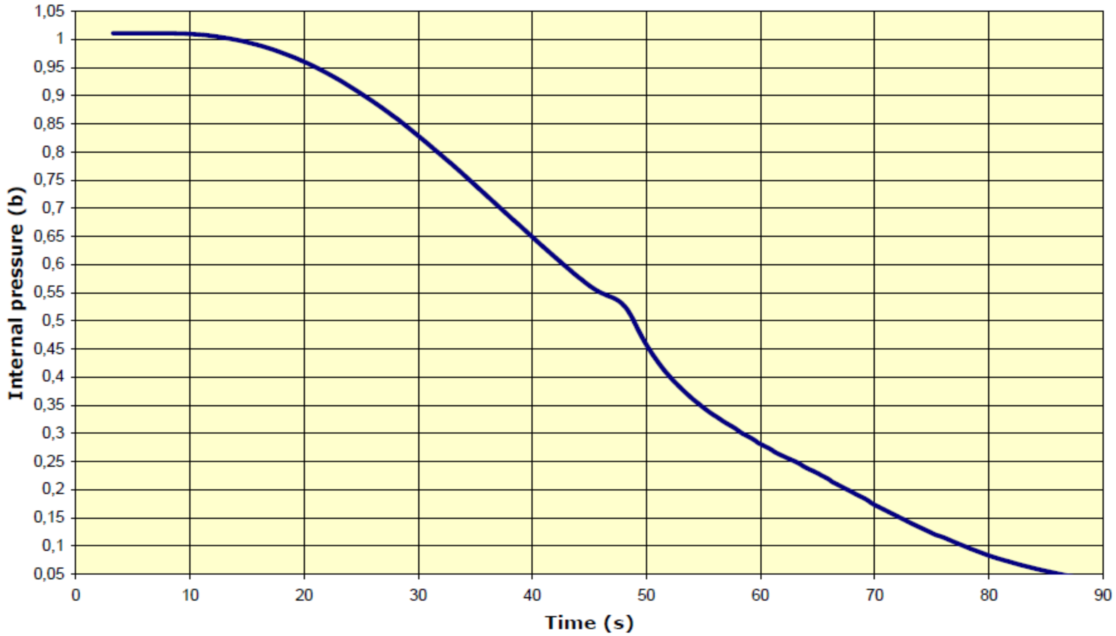
Hüllkurve des Schockspektrums an einem Anschluss zufolge Trennung Fairing und Oberstufe



Zulässiges Schockspektrum an einem geschraubten Anschluss

Statischer Druck auf Payload Ariane 5

- **Am Boden: Ventilationssystem zur Kühlung**
- **Im Flug: Garantierte niedrige Druckentspannung**



Druckänderung im Payload Volumen

Nichtmechanische Lasten: Thermale und elektromagnetische Lasten

Strukturlasten Ariane 5

Primäre (quasi statische) Strukturlasten

Jede Strukturkomponente: jeweilige Massenträgheitskräfte

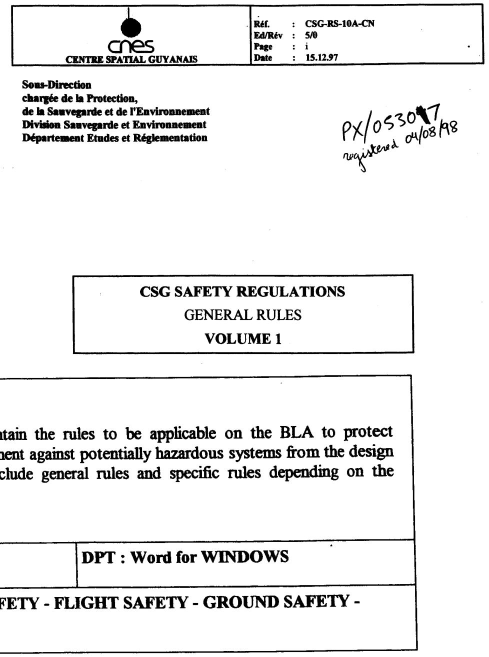
Booster: Innendruck und exzentrische axiale (Schub) Kraft

Motoren, Tanks und Druckleitungen: Innendruck

Hauptstufe und Oberstufe: axiale (Schub) Kraft und Wärmespannungen (kryogener Treibstoff)

Adapter: axiale (Schub) Kraft

Bemessung (Design Requirements, Arianespace z. B. Payload) Ariane 5



CNES
CENTRE SPATIAL GUYANAIS

Réf.	: CSG-RS-10A-CN
Ed/Rév	: 5/0
Page	: i
Date	: 15.12.97

Sous-Direction
chargée de la Protection,
de la Sauvegarde et de l'Environnement
Division Sauvegarde et Environnement
Département Etudes et Réglementation

PX/053017
registered 04/08/98

CSG SAFETY REGULATIONS
GENERAL RULES
VOLUME 1

Author's summary :

The CSG Safety Regulations contain the rules to be applicable on the BLA to protect persons, property and the environment against potentially hazardous systems from the design stage through operations. The include general rules and specific rules depending on the nature of the system.

Language : English	DPT : Word for WINDOWS

Keywords : REGULATIONS - SAFETY - FLIGHT SAFETY - GROUND SAFETY - ENVIRONMENT

- **Sicherheitsanforderungen**
  entsprechend Sicherheitsregeln Guiana Space Center (CSG) (Schutz von Personen, Anlagen, Umwelt beim Betrieb von gefährlichen Konstruktionen und Anlagen)

- **Materialwahl**
  Ausgaskriterien – flüchtendes Material

- **Mechanische Größen**
  Masse, Massenschwerpunkt (CoG)
  statische Unwucht: Toleranzwert für CoG
  dynamische Unwucht: Kongruenz der Hauptträgheitsachsen

- **Anforderungen an die Eigenfrequenz, z. B:**
  >= 31 Hz Raumfahrzeug (S/C) Masse < 4000 kg
  >= 27 Hz S/C Masse >= 4000 kg

Bemessung (Dimensioning Loads z. B. Payload) Ariane 5

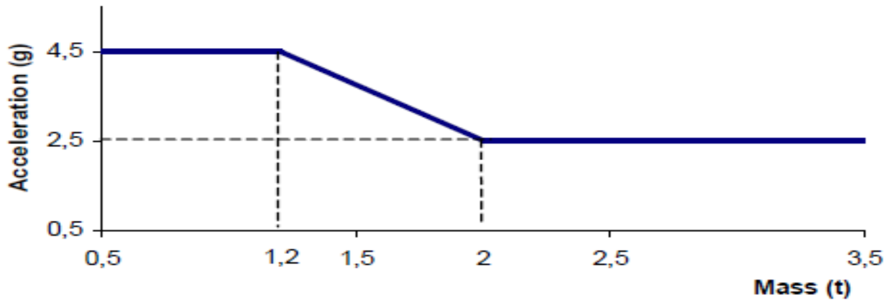
- **Lastfaktoren (Design load factors)**

Acceleration (g) / Critical flight events	Longitudinal		Lateral	Additional line load (N/mm)
	Static	Dynamic	Static + Dynamic	
Lift-off	- 1.8	± 1.5	± 2	10 (15*)
Maximum dynamic pressure	- 2.7	± 0.5	± 2	14 (21*)
SRB end of flight	- 4.55	± 1.45	± 1	20 (30*)
Main core thrust tail-off	- 0.2	± 1.4	± 0.25	0
Max. tension case: SRB jettisoning	+ 2.5**		± 0.9	0

* with adapter PAS 2624

SRB … Solid Rocket Booster

** for a spacecraft with first longitudinal frequency above 40 Hz, the tension value is the following:



Bemessung (Dimensioning Loads z. B. Payload) Ariane 5

- **Linienlasterhöhung (Line loads peaking)**
  zufolge Imperfektionen (geometrische Abweichungen, lokal unterschiedliche Struktursteifigkeit)
  => Schubkraft nicht zentrisch

- **Montagelasten (handling loads)**
  z. B: zusätzliche Lasten an der Payload (~ 200 kg Adaptergewicht)

- **Dynamische Lasten (Dynamic loads)**
  entsprechend den Beschleunigungsspektren
  für Sekundarstruktur und Anbauteile (Solar Panel, Antenne)

Bemessung (Kompatibilität und Nachweisanforderungen) Ariane 5

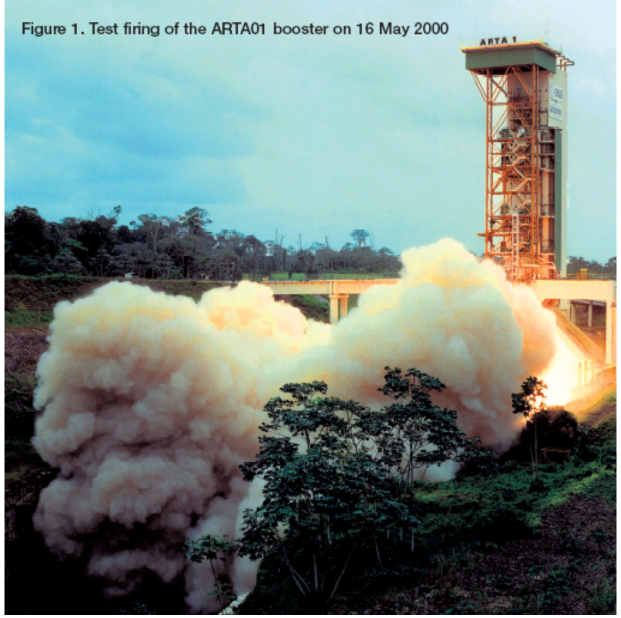
Sicherheitsfaktoren (Safety factors)
dienen als Reserve bei erhöhten Lastfaktoren,
positive Reserven gegenüber Streck- und Bruchgrenze

S/C tests	Qualification	
	Factors	Duration/Rate
Static (QSL)	1,25 ultimate 1,1 yield	N/A
Sine vibrations	1,25	2 oct/min
Acoustics	1.41 (or +3 dB)	120 s
Shock	1.41 (or +3 dB)	N/A

N/A Not **A**pplicable; **S/C S**pace**c**raft; **QSL Q**uasi **S**tatic **L**oad

Qualifikation (Prüftests) Ariane 5

- **Statischer Test (static test)**
  Primärstruktur
- **Dynamischer Test (sinusoidal vibration test)**
  Frequenzlauf in jede Achse (Shaker)
- **Schalltest (acoustic vibration test)**
  im Schallraum
- **Schockprüfung (shock qualification)**
  Test der Primärstruktur
  Analyse der Ausrüstung, Anbauteile
- **Brennversuch (Firing Test)**
  Booster



Struktur einer Rakete Ariane 5

CRYOGENIC MAIN CORE STAGE (EPC)

SOLID ROCKET BOOSTER (EAP)

Inter Stage Structure (ISS)

CRYOGENIC UPPER STAGE (ESC-A)

VEB

CONE 3936

SYLDA5

PAYLOAD FAIRING

Diameter	5.4 m
Height	17 m
Mass	2675 kg
Structure	Two halves - Sandwich CFRP sheets and aluminium honeycomb core
Acoustic protection	Foam sheets
Separation	Horizontal and vertical separations by leak-proof pyrotechnical expanding tubes

Carbon **F**ibre **R**einforced **P**lastics (**CFRP**)

Strukturmaterialien

Ariane 5

- **Hochfester rostfreier Stahl**
  höhere Festigkeit/Steifigkeit
  gute Korrosionsbeständigkeit

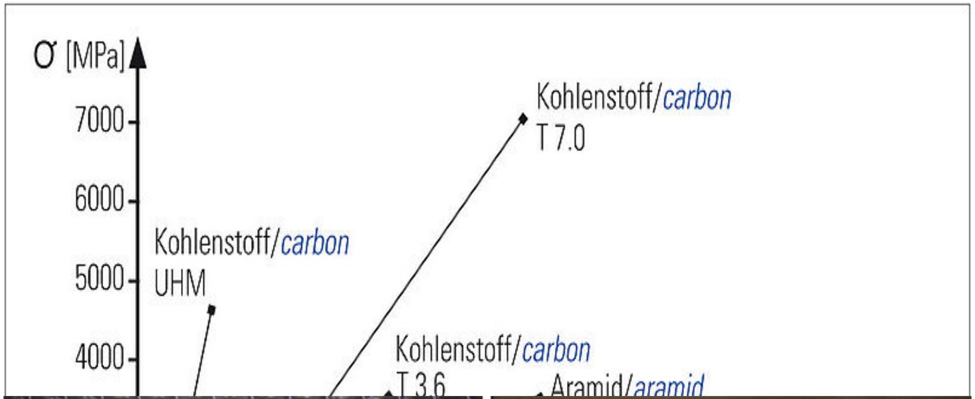
- **Aluminiumlegierung**
  geringere Festigkeit/Steifigkeit
  jedoch geringe Dichte

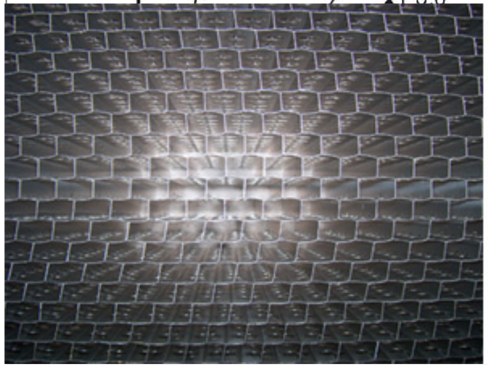
- **Kohlenstofffaser verstärkter Kunststoff (CFRP)**
  sehr hohe Festigkeit/Steifigkeit
  geringe Dichte

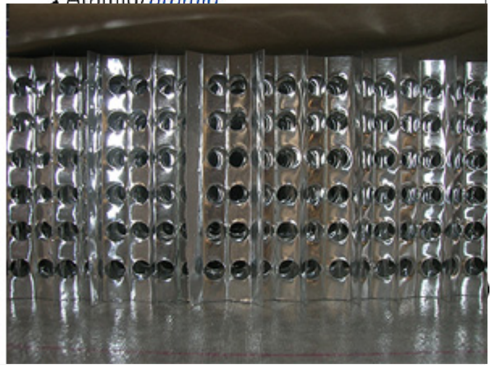
- **Aluminium Wabenstruktur**
  geringe Festigkeit/Steifigkeit
  jedoch sehr geringe Dichte

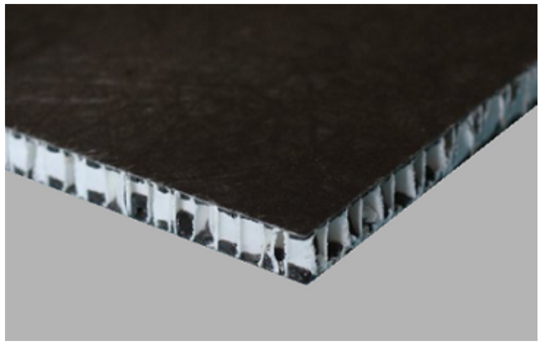
- **Sandwich (CFRP Schale mit Kern aus Aluminium Wabenstruktur)**
  sehr hohe Festigkeit/Steifigkeit, sehr geringe Dichte

- **Kork**
  ablativer/dämmender Werkstoff

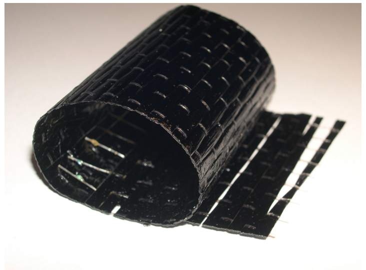


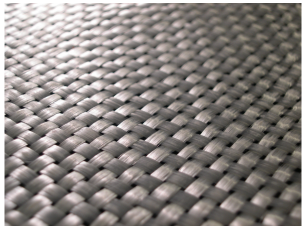


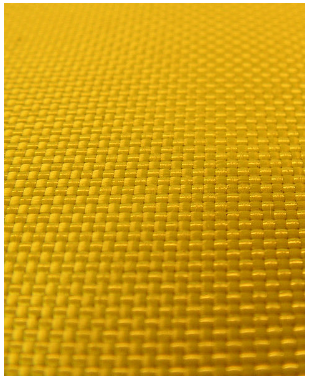




Faserwerkstoffe







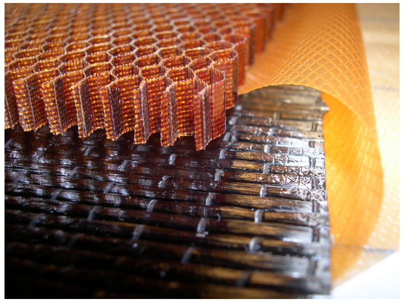
- **Glasfaser**
  gute mechanische, thermische, chemische Eigenschaften
  Festigkeit wie bei Metallen, Steifigkeit niedriger als bei Metallen

- **Kohlenstofffaser**
  gute Dauerfestigkeit, geringe Wärmeausdehnung
  Strahlendurchlässig und elektrisch leitend
  höhere Festigkeit/Steifigkeit als GFK

- **Aramidfaser** (organische Kunstfasern)
  Dämpfungseigenschaften, nicht entflammbar,
  chemische Beständigkeit
  Festigkeit/Steifigkeit ähnlich Glasfaser

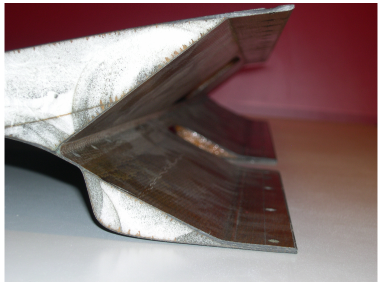
Werkstoff	Dichte g/cm^3	Zugfestigkeit MPA	Zug-E-Modul GPa	Lineare Dehngrenze %	Reißlänge km
Stahl	7,8	1,8 - 2,2	210	1,4 - 1,7	max. 30
Glasfasern	2,6	1,8 - 3,0	72 - 83	2 - 3	70 - 120
Kohlenstofffasern	1,7 - 1,9	2,4 - 7,0	230 - 700	0,5 - 2,3	150 - 380
Aramidfasern	1,4 - 1,5	2,3 - 3,5	60 - 130	2,0 - 4,0	180 - 240

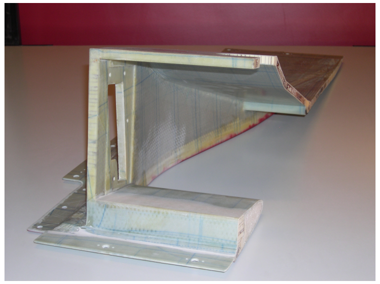
Faser-Verbund-Werkstoff (CFK, GFK …)



- **Faser-Verbund-Werkstoff (FVW)**
  Glas-Faser-Kunststoff (GFK)
  Kohlenstoff-Faser-Kunststoff (CFK)
  Aramid-Faser-Kunststoff (AFK)

- **FVW-Konstruktionen**
  direkter Strukturwerkstoff (Stäbe, Balken, Membrane)
  verbauter Werkstoff (Sandwichplatten)



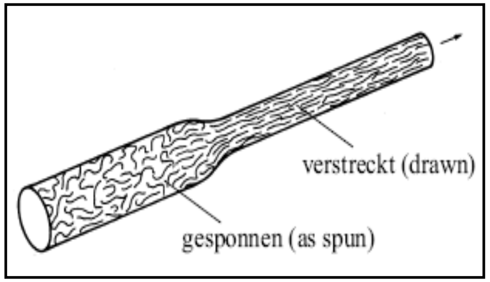


Faser-Kunststoff-Verbund

Verbundaufbau

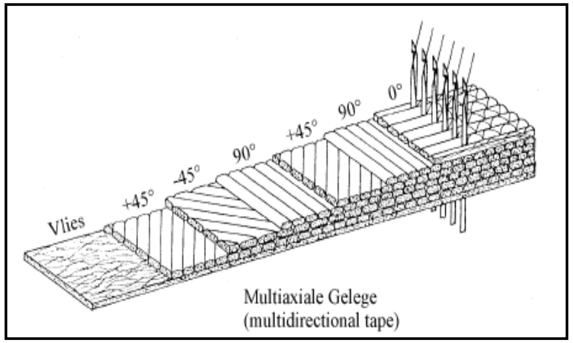
gerichtete Langfasern

- **Faser:**
  Aufgabe: am Bauteil anliegende Lasten übernehmen
  Nutzung der starken atomaren Bindung
  Eigenschaften (Größeneffekt, Orientierung, Kerbfreiheit, Eigenspannungen)
  Faser-Halbzeuge (Gewebe, Multiaxialgelege, Matte, Vlies, etc)



- **Matrix:**
  Aufgabe: fixiert, verklebt und stützt die Faser
  trägt quer zur Faser, bildet den Schichtverbund
  primär Duroplaste (Harze)

- **Faser-Matrix-Grenzfläche:**
  Aufgabe: bildet Haftfestigkeit
  Grenzschicht beeinflusst mechanische Eigenschaften
  8 % der Matrix sind Grenzschichten

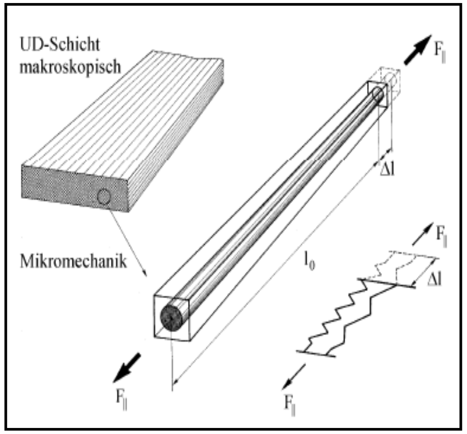


Faser-Kunststoff-Verbund (FKV)

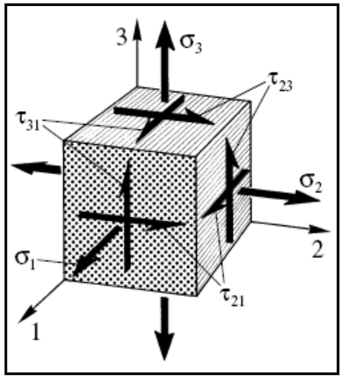
Faser-Kunststoff-Verbund

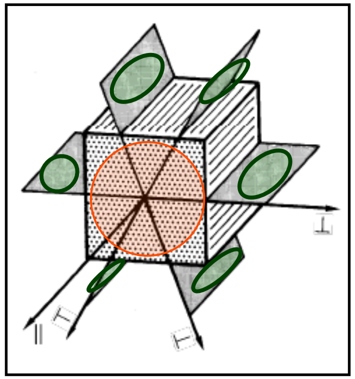
UD-Schicht

- **Annahmen:**
  paralleler Faserverlauf
  gleichmäßige Verteilung über QS
  verlaufen ideal gerade ohne Unterbrechung
  Matrix und Faser haften ideal aneinander



- **Lineares Elastizitätsgesetz fürs Kontinuum:**
  Transversale Isotropie (spezielle Orthotropie)
  isotrope Ebene (IE) normal zur Faserlängsrichtung
  senkrecht zur IE unendliche viel Symmetrieebenen



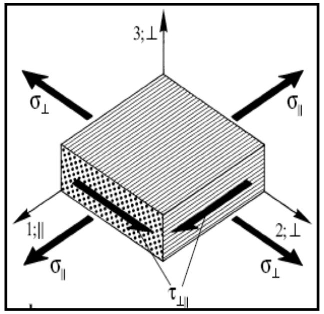


$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{21} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{E_\parallel} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_\perp} & \frac{-\nu_{\parallel\perp}}{E_\perp} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_\parallel} & \frac{1}{E_\perp} & \frac{-\nu_{\perp\perp}}{E_\perp} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{\perp\parallel}}{E_\parallel} & \frac{-\nu_{\perp\perp}}{E_\perp} & \frac{1}{E_\perp} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\perp}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}} \end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix } [S]} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{21} \end{Bmatrix}$$

FKV

UD-Schicht

- **Lineares Elastizitätsgesetz der Scheibe:**
  Reduzierung aufgrund des ESZ

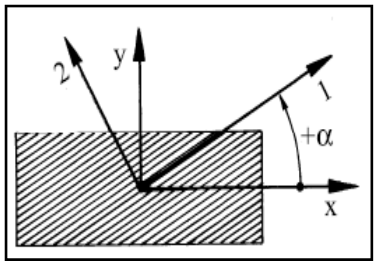


$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{21}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0\\ S_{12} & S_{22} & 0\\ 0 & 0 & S_{66}\end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix } [S]} \cdot \begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{21}\end{Bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = [S]\cdot\{\sigma\}$$

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{21}\end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} +\frac{1}{E_\parallel} & -\frac{\nu_{\parallel\perp}}{E_\perp} & 0\\ -\frac{\nu_{\perp\parallel}}{E_\parallel} & +\frac{1}{E_\perp} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{\perp\parallel}}\end{bmatrix}}_{\text{Nachgiebigkeitsmatrix } [S]} \cdot \begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{21}\end{Bmatrix}$$

- **Polartransformation:**
  Faserwinkel



$$\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16}\\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26}\\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66}\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}$$

Faser-Kunststoff-Verbund

FKV

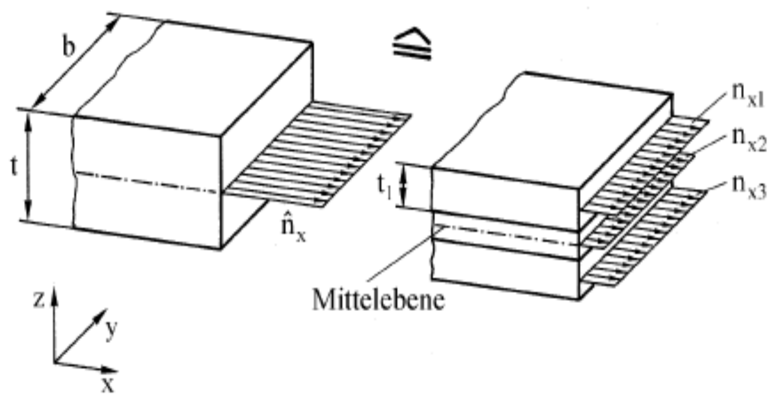
Mehrschichtverbund (MSV)

- **Klassische Laminattheorie (CLT) des MSV als Scheibenelement:**

mechanische Modellierung des MSV als Scheibenelement

Kräftegleichgewicht am MSV (kinetische Beziehung)

$$
\begin{aligned}
\hat{n}_x &= \hat{\sigma}_x \cdot t = \sum_{k=1}^{n} n_{xk} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{xk} \cdot t_k \\
\hat{n}_y &= \hat{\sigma}_y \cdot t = \sum_{k=1}^{n} n_{yk} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{yk} \cdot t_k \\
\hat{n}_{xy} &= \hat{\tau}_{xy} \cdot t = \sum_{k=1}^{n} n_{xyk} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{xyk} \cdot t_k
\end{aligned}
$$



Konstitutive Beziehung der ES

$$\boxed{\{\sigma\}_k \ \text{durch} \ [\bar{Q}]_k \cdot \{\varepsilon\}_k}$$

Kinematische Beziehung am MSV

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{xk} &= \hat{\varepsilon}_x \\
\varepsilon_{yk} &= \hat{\varepsilon}_y \\
\gamma_{xyk} &= \hat{\gamma}_{xy}
\end{aligned}
$$

Konstitutive Beziehung des MSV

FKV

Faser-Kunststoff-Verbund

Mehrschichtverbund (MSV)

- **Klassische Laminattheorie (CLT) des MSV als Scheibenelement:**
  Konstitutive Beziehung des MSV
  Spannungs-, Verformungsanalyse in den Schichten des MSV

$$\begin{Bmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_y \\ \hat{n}_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{11k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{12k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{16k} \cdot t_k \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{12k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{22k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{26k} \cdot t_k \\ \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{16k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{26k} \cdot t_k & \sum_{k=1}^{n} \bar{Q}_{66k} \cdot t_k \end{bmatrix}}_{\text{Scheiben-Steifigkeitsmatrix } [A]} \cdot \begin{Bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}$$

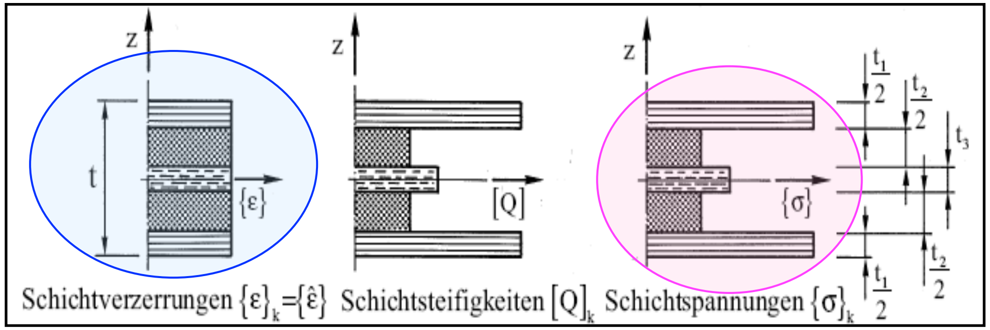
$$\{\hat{n}\} = [A] \cdot \{\hat{\varepsilon}\}$$

$\bar{Q}_{ij}$ = in das x,y-MSV-Koordinatensystem transformierte Schichtsteifigkeiten

Schnittkräften

Schichtverzerrungen

Schichtspannungen



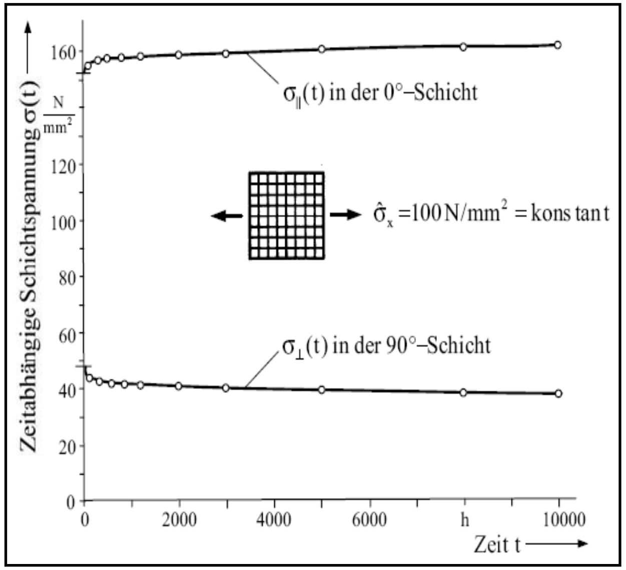
Langzeitverhalten

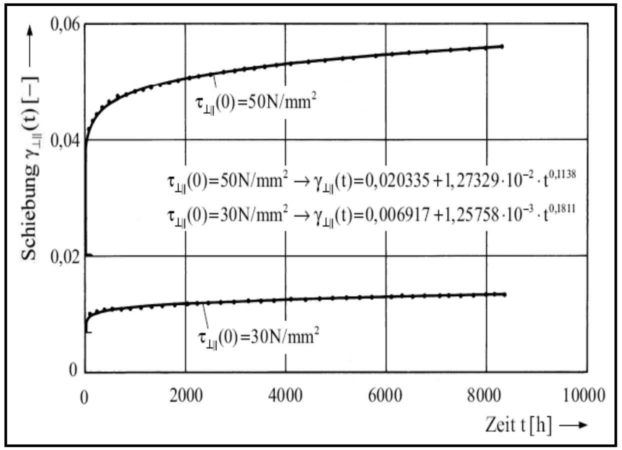
Phänomenologie

- **Retardations-, Relaxationsvorgänge:**
  Verbund innerlich statisch unbestimmt =>
  Kräfteumlagerung Matrix/Faser =>
  Abbau Spannungsspitzen

- **Rheologische Vorgänge:**
  Faser zeitinvariant
  Matrix stark zeitabhängig

- **Viskoelastisches Verhalten**



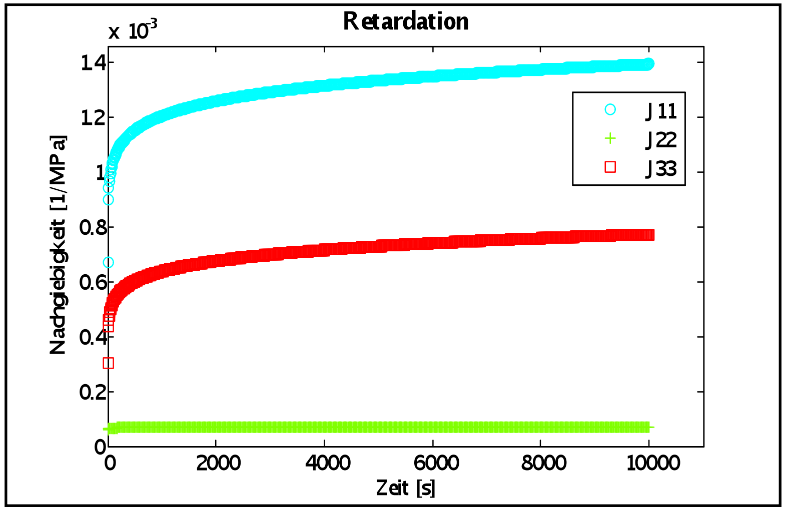


Modellierung

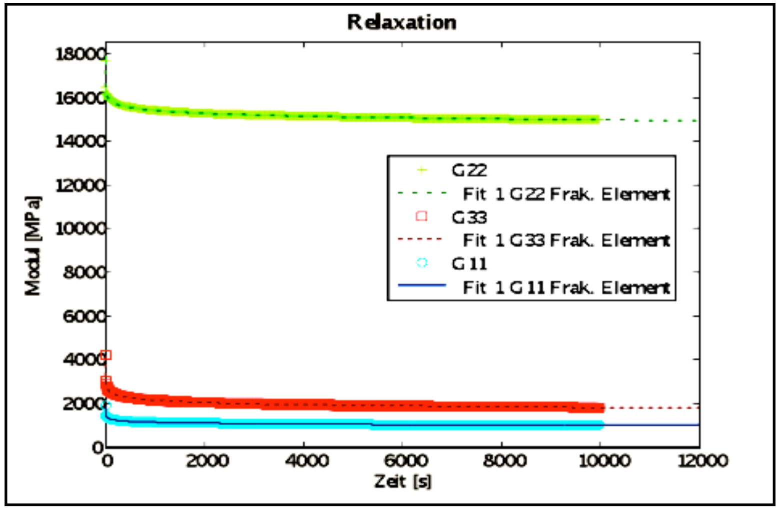
- **Viskoelastizitätstheorie:**
  lineare Viskoelastizität (Linearitätsgrenze)
  orthotroper Werkstoff =>
  orthotropes linear viskoelastisches Materialmodell

Viskoelastisches Verhalten

- **Retardation (Kriechen):**
  Zunahme der Dehnung
  bei konstanter Spannung



- **Relaxieren:**
  Abnahme der Spannung
  bei konstanter Dehnung



- **Einflüsse:**

Belastungsart	**(Zug, Druck, Schub)**
Belastungsgrad	**(Belastung/Bruchlast)**
Umwelt	**(Alterung)**

Lineare Viskoelastizität

Lineare Viskoelastizität

- **Annahmen:**
  - kleine Deformationen (linearisierter Verzerrungstensor)
  - lineare Ratenabhängigkeit von der Belastung
  - Superpositionsprinzip (Boltzmann)

$$\mathbf{T}(t) = \underset{s \le t}{\mathbf{L}}\left[\mathbf{E}(s)\right]$$

$$\mathbf{E}(t) = \underset{s \le t}{\hat{\mathbf{L}}}\left[\mathbf{T}(s)\right]$$

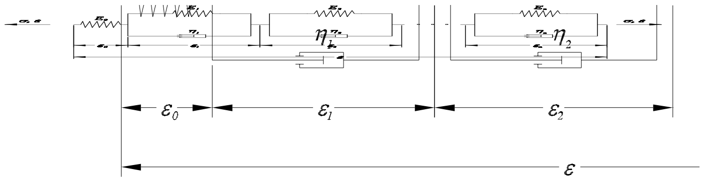
$$\alpha_1 \mathbf{T}_1(t) + \alpha_2 \mathbf{T}_2(t) = \alpha_1 \underset{s \le t}{\mathbf{L}}\left[\mathbf{E}_1(s)\right] + \alpha_2 \underset{s \le t}{\mathbf{L}}\left[\mathbf{E}_2(s)\right]$$

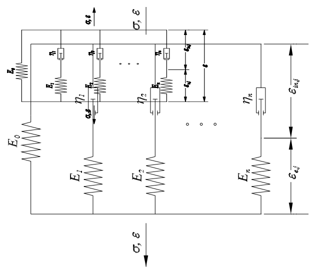
$$= \underset{s \le t}{\mathbf{L}}\left[\alpha_1 \mathbf{E}_1(s) + \alpha_2 \mathbf{E}_2(s)\right]$$

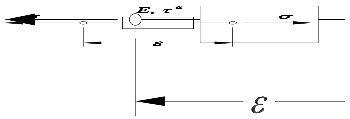
- **Integrale Formulierung:**
  Gedächtnisfunktionen

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\,\dot{\varepsilon}(s)\,ds$$

- **Rheologische Modelle:**
  klassische
  kontinuierliche
  fraktionale







Langzeitverhalten

- **Aufteilung des Materialverhaltens:**
  elastischer Anteil
  inelastischer Anteil

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{in}(t)$$

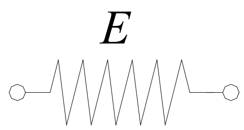
- **Mathematische Ansätze:**
  Potenzfunktion
  Exponentialfunktion
  Logarithmusfunktion

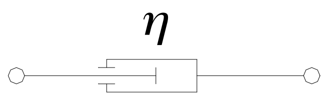
$$\varepsilon_{in}(t) = a \cdot t^{n}$$

$$\varepsilon_{in}(t) = a(1 - e^{-nt})$$

$$\varepsilon_{in}(t) = a + n \cdot \log_{10} t$$

- **Mechanische Modelle:**
  physikalisch interpretierbar
  mechanische Grundmodelle
  - elastische Feder
  - viskoser Dämpfer





Anisotrope lineare Viskoelastizität

- **Tensor Darstellung:** $\mathrm{T}(t)=\int_{-\infty}^{t}\overset{4}{\mathrm{G}}(t-s)\dot{\mathrm{E}}(s)ds$ bzw. $\mathrm{E}(t)=\int_{-\infty}^{t}\overset{4}{\mathrm{J}}(t-s)\dot{\mathrm{T}}(s)ds$
- **Voigt`sche Darstellung:** $\sigma(t)=\int_{0}^{t}\mathrm{G}(t-s)\dot{\varepsilon}(s)ds$ bzw. $\varepsilon(t)=\int_{0}^{t}\mathrm{J}(t-s)\dot{\sigma}(s)ds$

$$
\begin{pmatrix} \varepsilon_{11}(t) \\ \varepsilon_{22}(t) \\ \varepsilon_{33}(t) \\ 2\varepsilon_{12}(t) \\ 2\varepsilon_{31}(t) \\ 2\varepsilon_{23}(t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^{t} \begin{bmatrix} J_{11}(t-s) & . & . & . & . & J_{16}(t-s) \\ . & . & & & & . \\ . & & . & & & . \\ . & & & . & & . \\ . & & & & . & . \\ J_{61}(t-s) & . & . & . & . & J_{66}(t-s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\sigma}_{11}(s) \\ \dot{\sigma}_{22}(s) \\ \dot{\sigma}_{33}(s) \\ \dot{\sigma}_{12}(s) \\ \dot{\sigma}_{31}(s) \\ \dot{\sigma}_{23}(s) \end{pmatrix} ds
$$

Zeit-Feuchte Verschiebungsprinzip

Voraussetzungen/Anmerkungen

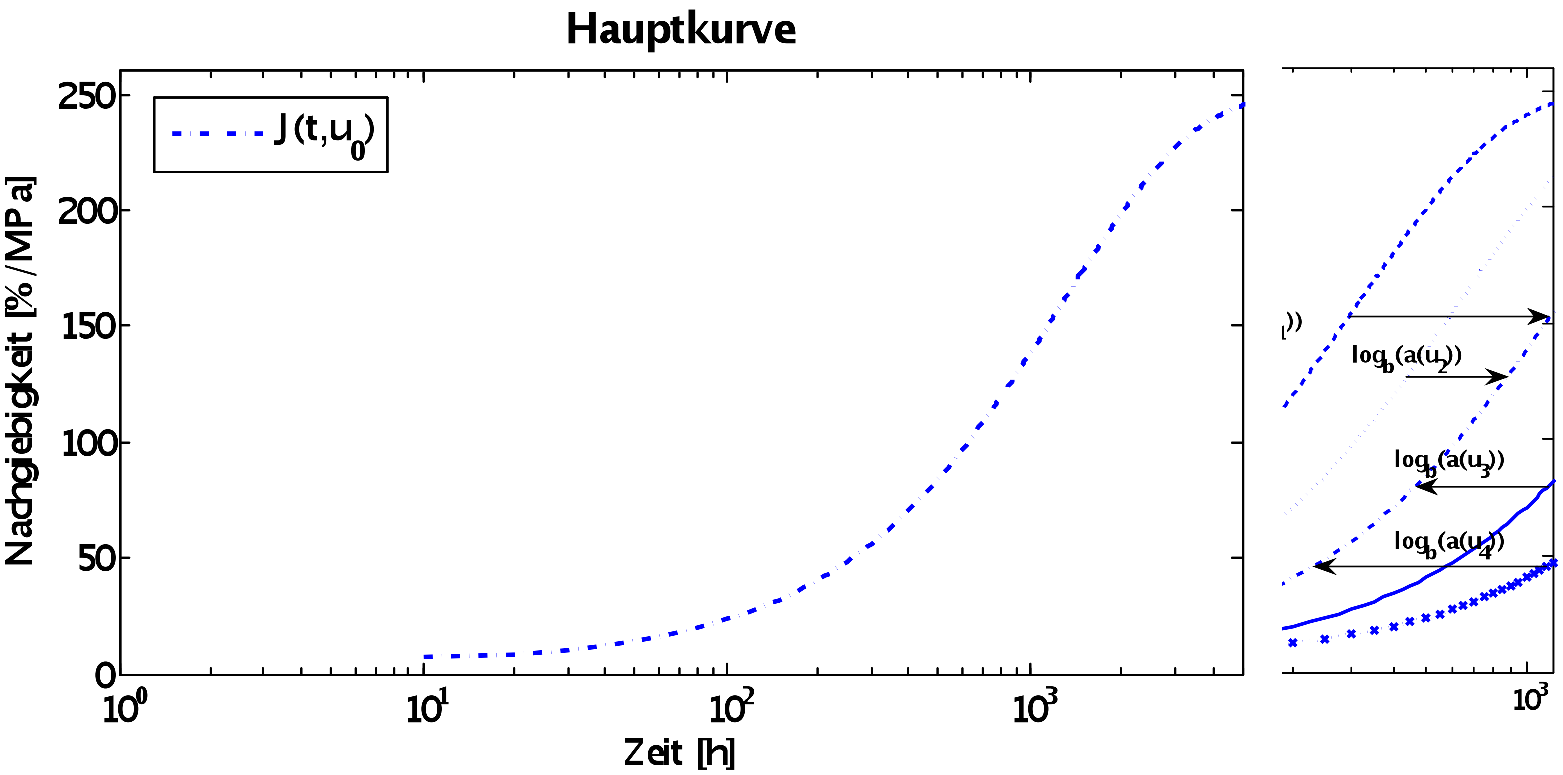
- **feuchterheologisch einfaches Verhalten:**
  viskose Stoffanteile feuchteabhängig
  elastische Stoffanteile feuchteresistent

- **empirische Erkenntnis:**
  Feuchteerhöhung $\longrightarrow$
  Verschiebung der Dispersionsgebiete zu kürzeren Zeiten

- **Verschiebung**
  logarithmischer Zeitmaßstab

Zeit-Feuchte Verschiebungsprinzip

- **Hauptkurve:**



Berechnungsarten

- **Analytische Berechnung:**
  linear elastische Verfahren
  Stab
  Balken
  Scheibe
  Platte
  Membrane
  nichtlinear inelastische Verfahren
  Iterative Verfahren (Theorie II. Ordnung und höher)

- **Numerische Berechnung:**
  Ritzsches Verfahren
  Differenzenverfahren
  Finite Element Methode (FEM)
  Bountary Element Methode (BEM)

Numerische Simulation FEM

Finite – Elemente – Methode (FEM)

wichtiges Näherungsverfahren in den Ingenieurwissenschaften und in der mathematischen Physik zur Lösung von

- Variationsproblemen (Extrema von Funktionalen, die auf eine Klasse von Funktionen definiert sind; Brachistochrone/Bernoulli)
- Differentialgleichungen (Rand- und Anfangsrandwertproblemen)
- Variationsungleichungen (Differentialgleichungen mit undefinierten RB und AB)

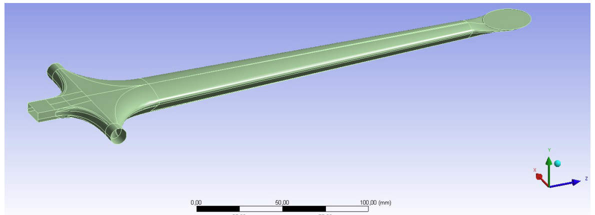
Vorteile der FEM:

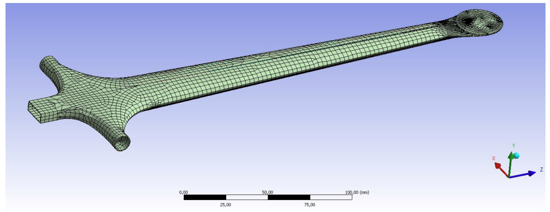
- Die Berücksichtigung von komplizierten zwei- und dreidimensionalen Geometrien ist relativ einfach
- Berücksichtigung von vielen unterschiedlichen Materialmodellen (elastische, viskose, plastische und Kombinationen daraus)
- Kleine und große Deformationen (Kontakt, Stabilität)

Numerische Simulation FEM

Zweck

Numerische Untersuchung der Beanspruchung von Bauteilen für die Auslegung und Bemessung





Ablaufschritte

- **Diskretisierung**
  Zerlegung einer Struktur in kleine endliche (finite) Elemente (Stab, Balken, Flächenelement, Solid)

- **Formfunktion/Ansatzfunktion**
  Wahl einer Formfunktion für jedes Element; beschreibt einen approximierten Verformungsverlauf im Element; Parameter a_i der Formfunktionen sind die Knotenverschiebungen u_i des Elementes

- **Prinzip von d‘Alambert in Lagrangescher Fassung; Minimum der potentiellen Energie (Castigliano); WGV (Weg-Größen-Verfahren):**
  Bestimmung der unbekannten Parameter a_i der Formfunktionen

$$\boxed{\text{P.v.d'A.i.L.F.}: \delta W_\sigma = \delta W_{\ddot{a}} + \delta W_T \quad \text{bzw.} \quad \text{P.d.v.V.}: \delta W_\sigma = \delta W_{\ddot{a}}}$$

$$\boxed{\Pi = A^{(i)} + A^{(a)};\ \partial\Pi / \partial a_i = 0 \quad \rightarrow \quad a_i}$$

- **Verzerrungen/Spannungen (kinematische/konstitutive Beziehung)**
  Die Ableitung der Verformungen in den Elementen ergibt die Verzerrungen → Konstitutive Beziehung → Spannungen

Numerische Simulation FEM

Grundgleichung der FEM (statisch)

$$[K]\{U\}=\{R\} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & . & . \\ K_{21} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1 \\ . \\ . \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ . \\ . \\ R_n \end{bmatrix}$$

Gesucht: Knotenverschiebungen $\{U\}=[K]^{-1}\{R\}$

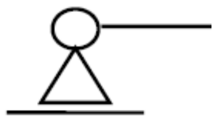
Lösungsprobleme

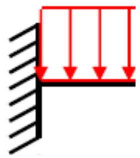
- **Invertierung $[K]^{-1}$ (extreme Steifigkeitssprünge => Singuläre Steifigkeitsmatrix)**
- **Lineare Abhängigkeit im Gleichungssystem (zu wenige Randbedingungen = Starrkörperverschiebung)**
- **Zu feine Diskretisierung (zu viele Freiheitsgrade, Speicherproblem)**

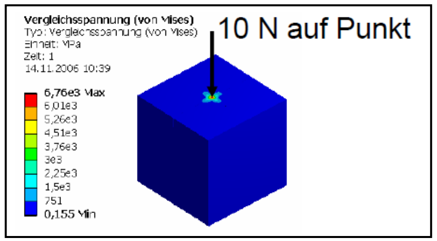
Numerische Simulation FEM

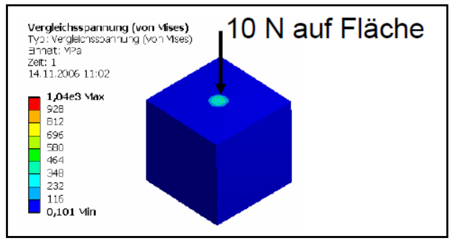
Anwendungsprobleme der FEM

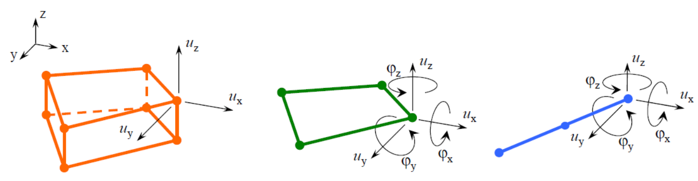
- **Falsche Lagerrandbedingungen**
  starre/nachgiebige/gelenkige Lagerung?
- **Lastkonzentrationen**
  punktuelle/flächige Lasteinleitung?
- **Falsches Materialmodell**
  Werkstoffparameter?
- **Zu grobe Diskretisierung**
  zu steife Struktur?
- **Elementwahl**
  Verschiebungsansatz?, Knotenfreiheitsgrade?
- **Eingabefehler**











Volumenelemente
3 FHG pro Knoten

Schalenelemente
6 FHG pro Knoten

Balkenelemente
6 FHG pro Knoten

Programmcodes FEM

Kommerzielle Programmcodes:

- ABAQUS: Universell einsetzbares FEM Programm mit einem Löser auch für hoch-nichtlineare Problemstellungen von ABAQUS Inc. (jetzt Dassault Systèmes)
- ADINA : universelles FEM-Programmsystem für Struktur, Strömung und Fluid-Struktur-Interaktion von ADINA R&D Inc. USA
- Ansys: universell einsetzbares FEM-Programm (linear, nichtlinear, kleine und große Verformungen) von Ansys Inc., USA entwickelt
- COMSOL Multiphysics: FEM-Simulationswerkzeug für beliebig gekoppelte physikalische Prozesse
- MARC: FEM-Programm von Marc Analysis Research Corporation, USA (jetzt MSC Software)
- Nastran: NASTRAN **NA**SA **Str**uctural- **An**alysis-Program, universell einsetzbares FEM-Programm, von der NASA entwickelt
- Samcef: SAMCEF, universell einsetzbares FEM-Programm, von der LTAS (Belgien) entwickelt
- LS-DYNA: universelles FEM-Programm mit Kernkompetenz in expliziter hochgradig nichtlinearer Strukturdynamik, LSTC. Inc.
- FEAP: FEM-Programm der UC Berkeley mit frei zugänglichem Quellcode. Zielgruppen sind Anwender in der universitären Ausbildung oder in der Forschung.

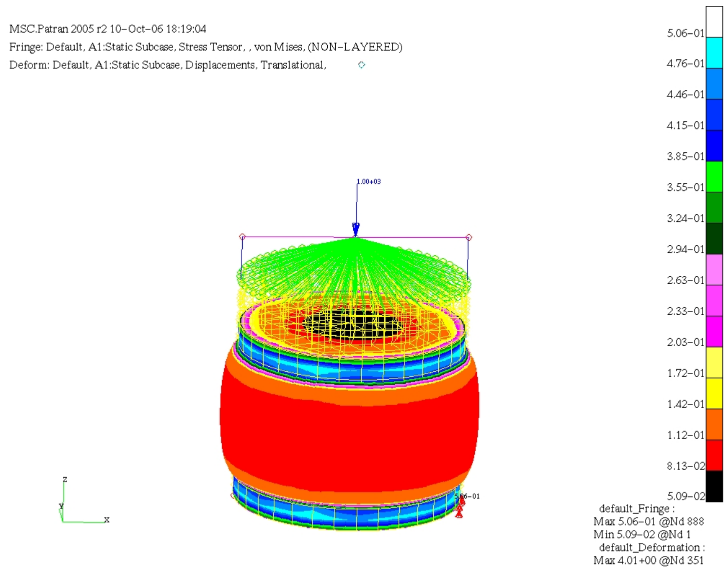
Freie Programmcodes:

- CalculiX: FEM-Programmpaket mit graphischem Pre- und Postprozessor, entwickelt von Guido Dhondt und Klaus Wittig. Teilweise kompatibel zum Abaqus-Format.
- Elmer: Finite-Elemente-Programm, mit dem strukturmechanische Simulationen und numerische Strömungssimulationen berechnet werden können.
- DUNE: Bibliothek, die eine vereinheitlichte Schnittstelle für verschiedene Gitter und FEM-Programme bereitstellt. Wird vor allem in der universitären Ausbildung und Forschung benutzt.
- Z88: Ein GNU-GPL-Freeware FEM-Programm, entwickelt von Professor Frank Rieg. Es beinhaltet eine graphische Bedienoberfläche sowie mehrere leistungsstarke Solver und ist für Windows und Linux verfügbar.

Numerische Simulation FEM

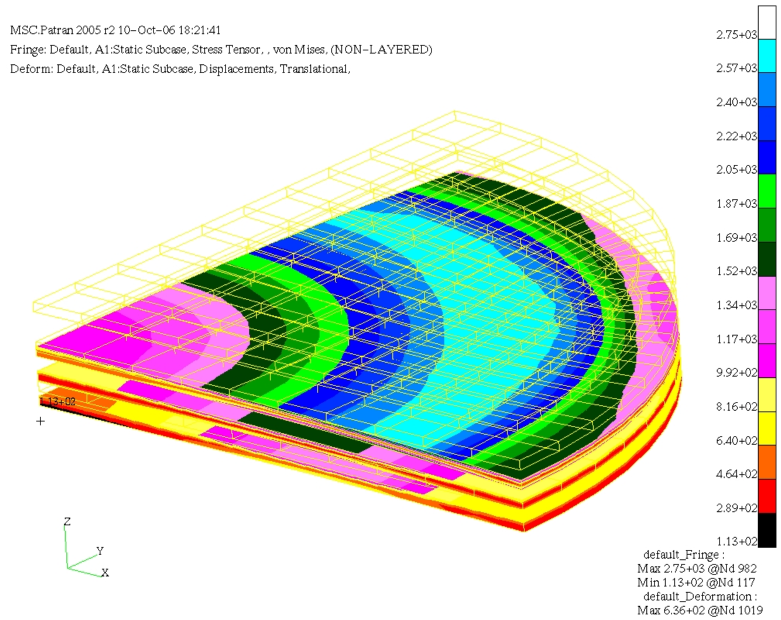
Simulationsbeispiele (isotrope Werkstoffe)

Elastomerlager



Verbund-Scheibe

(Elastomer/Stahl)



Numerische Simulation FEM

Simulationsbeispiele

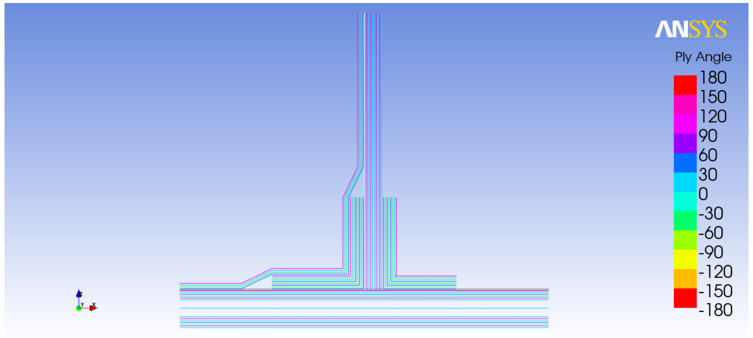
(orthotrope Werkstoffe)

$$\left[K^{(m)}\right] = \int_{V^m} \left[B^{(m)}\right]^T \left[E^{(m)}\right] \left[B^{(m)}\right] \mathrm{d}V^m$$

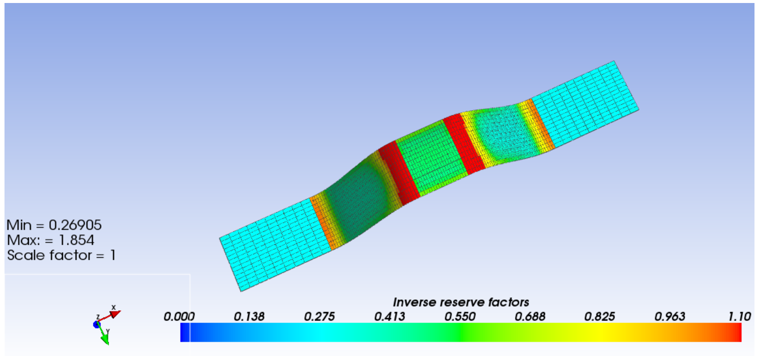
$$\left[E^{(m)}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_T} & -\frac{\nu_{LT}}{E_L} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{TL}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{pmatrix}$$

wesentlich: realitätsnahes Materialmodell

CFK-T-Stoss

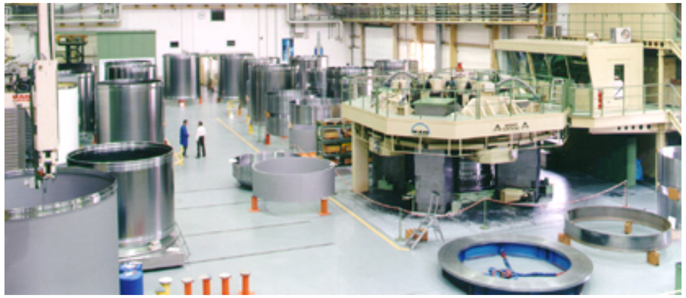


CFK-Bügel



CFK Booster Ariane 5

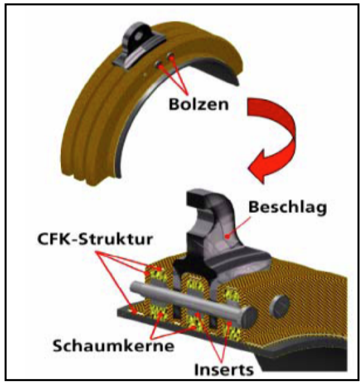
Stahl-Booster: schwerste Strukturkomponente ~19 t
größtes Gewichteinsparpotential
(~40% bei CFK)



- **CFK-Booster:**

Stahl-Ring:

CFK-Ring:



CFK DAAR-Ring Ariane 5

Motivation: Gewichtseinsparung
neue Technologien (Fertigung/Entwicklung)
Weltraumtechnik lokal binden

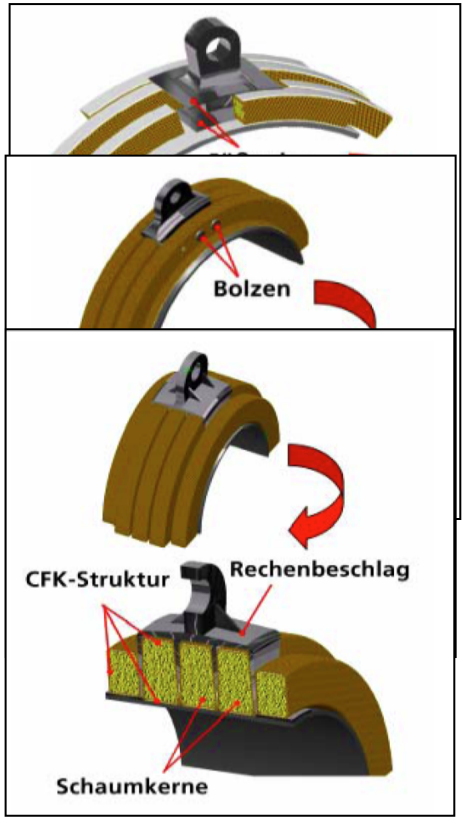
Booster und Ring aus CFK (mechanisch erforderlich)

Entwicklungsbeispiele*:

Bandagenkonzept*: Beschlag mit Sandwich-Ringen (UD) im Formschluss mit Booster, unlösbare Verbindung

Bolzenkonzept*: Beschlag durch Bolzen mit Sandwich-Ringen verbunden, lösbare Verbindung – jedoch Lochleibungsfestigkeit für FVW generell kritisch (Querspannungen)

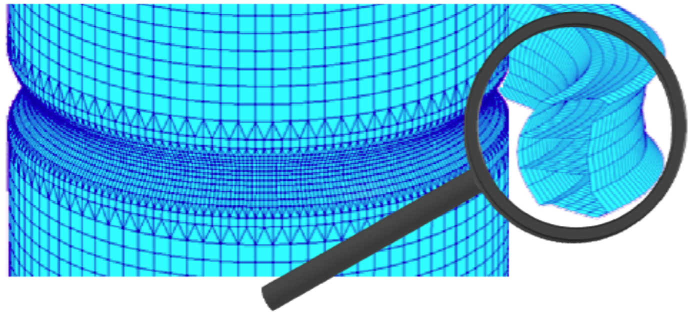
Rechenkonzept*: Beschlagbleche durch Reibschluss mit den CFK Stegen der Ringe verbunden, unlösbare Verbindung



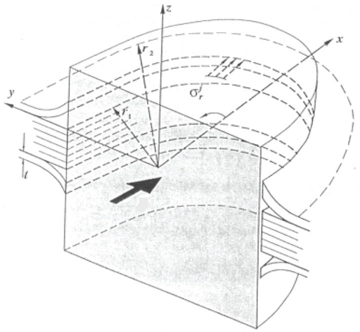
*) T. Niederstadt et al., Umsetzung eines Booster DAAR-Ringes in Faserverbundbauweise für die Ariane 5 Trägerrakete, Institut für Strukturmechanik, DLR-Braunschweig

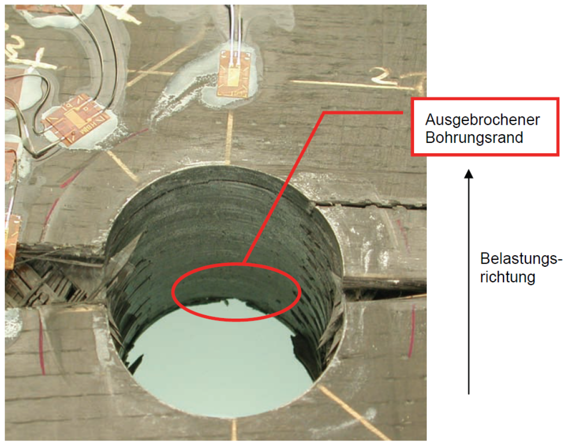
CFK DAAR-Ring Ariane 5

Simulationsergebnisse*:
Hohe Ringsteifigkeit
⇒ Boostereinschnürung
⇒ Ringnormalkraft + Stülpmoment
am Ring zufolge Inndruck (~90 bar)



Testergebnisse:**
z. B: Lochleibungsfestigkeit





*) T. Niederstadt et al., Umsetzung eines Booster DAAR-Ringes in Faserverbundbauweise für die Ariane 5 Trägerrakete, Institut für Strukturmechanik, DLR-Braunschweig, 2003

**) H. Diem, Tragfähigkeit von Bolzenverbindungen in dickwandigen Faserverbundstrukturen, TU-München Dissertation, 2007

Quellenverzeichnis

Auf ein direktes Zitieren der Quellen von Texten, Bildern und Fotos wurde verzichtet.

Alle Inhalte des Vortrages basieren auf folgenden Quellen:

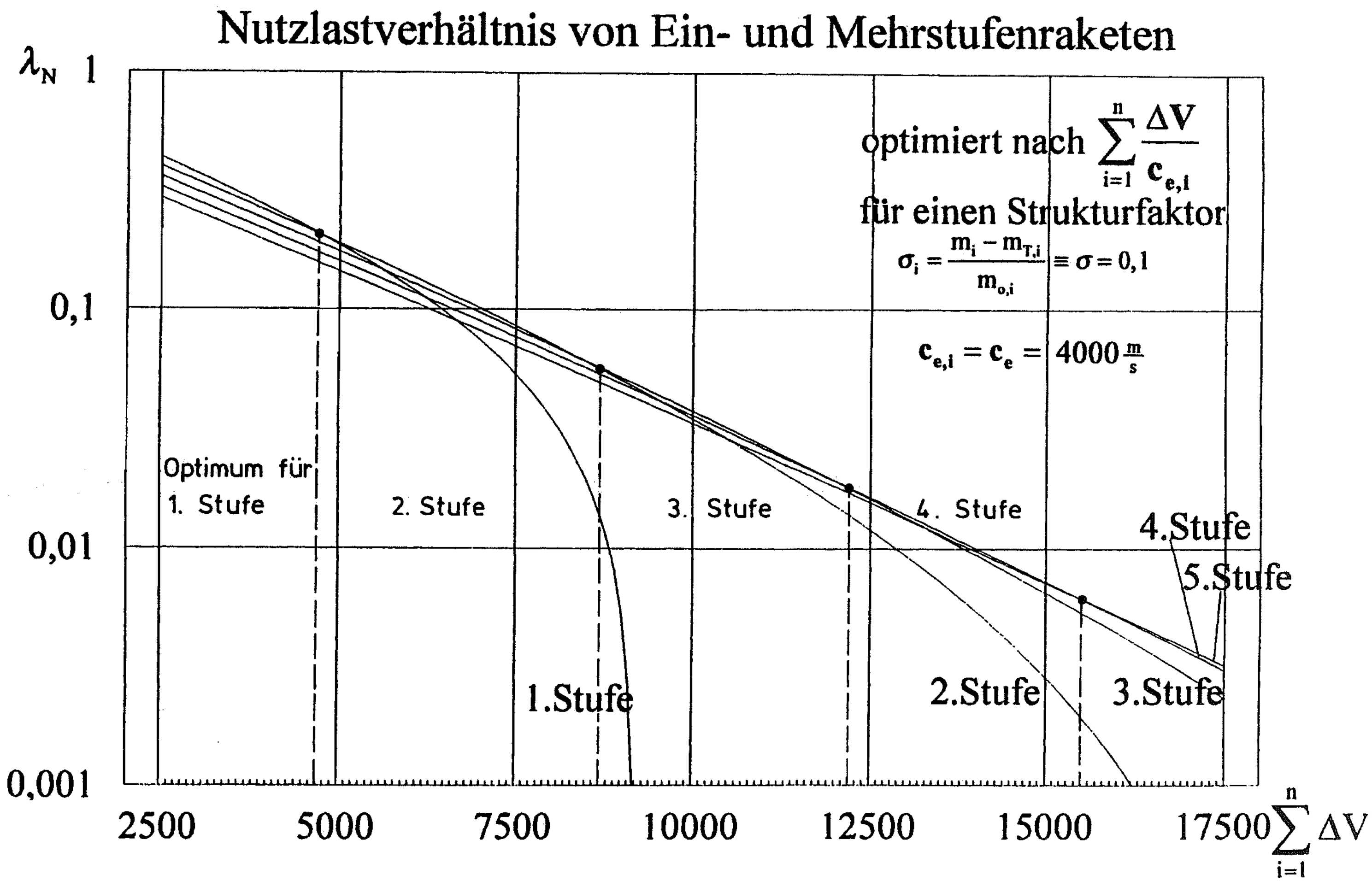
1. Raumfahrttechnik I, Skript, Prof. Häusler, Universität der Bundeswehr, München
2. Ariane 5 User´s Manual, Issue 5, Rev. 0, www.arianespace.com
3. First Test Firing of an Ariane-5 Production, Booster, esa bulletin 104 — november 2000
4. www.mt-aerospace.com
5. www.eads.com
6. www.cadfem.at
7. www.andritz.com

Zusammenfassung

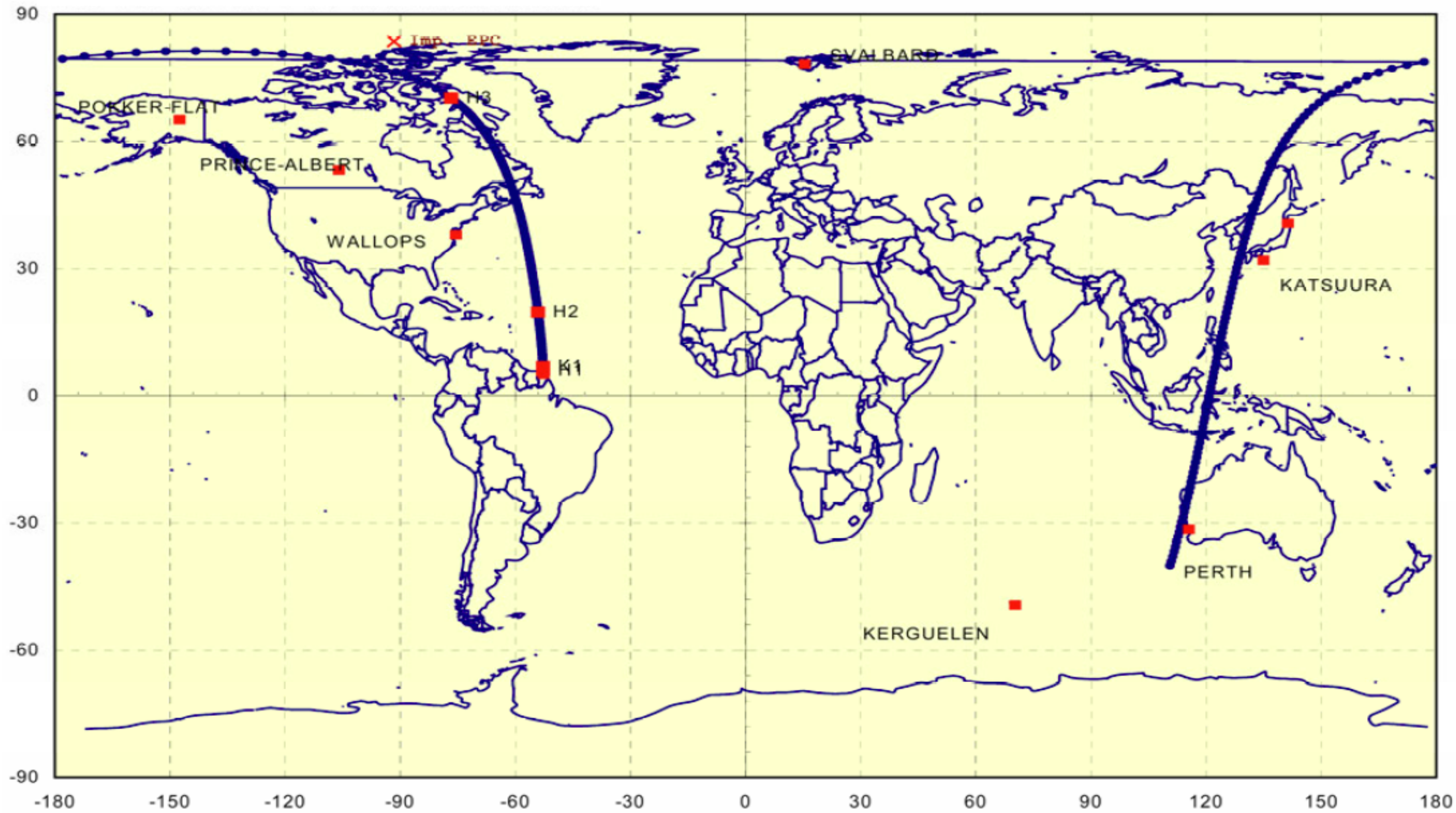
- **Antriebsvermögen**
  Nutzlast-, Struktur-, Treibstoffmasse
- **Raketenstrukturen**
  Ariane 5
- **Faser-Verbund-Werkstoffe**
  Phänomenologie und Modellierung
- **FEM**
  Grundlagen
- **FVW-Booster-DAAR**
  Vorstellung

Danke für Ihre Aufmerksamkeit

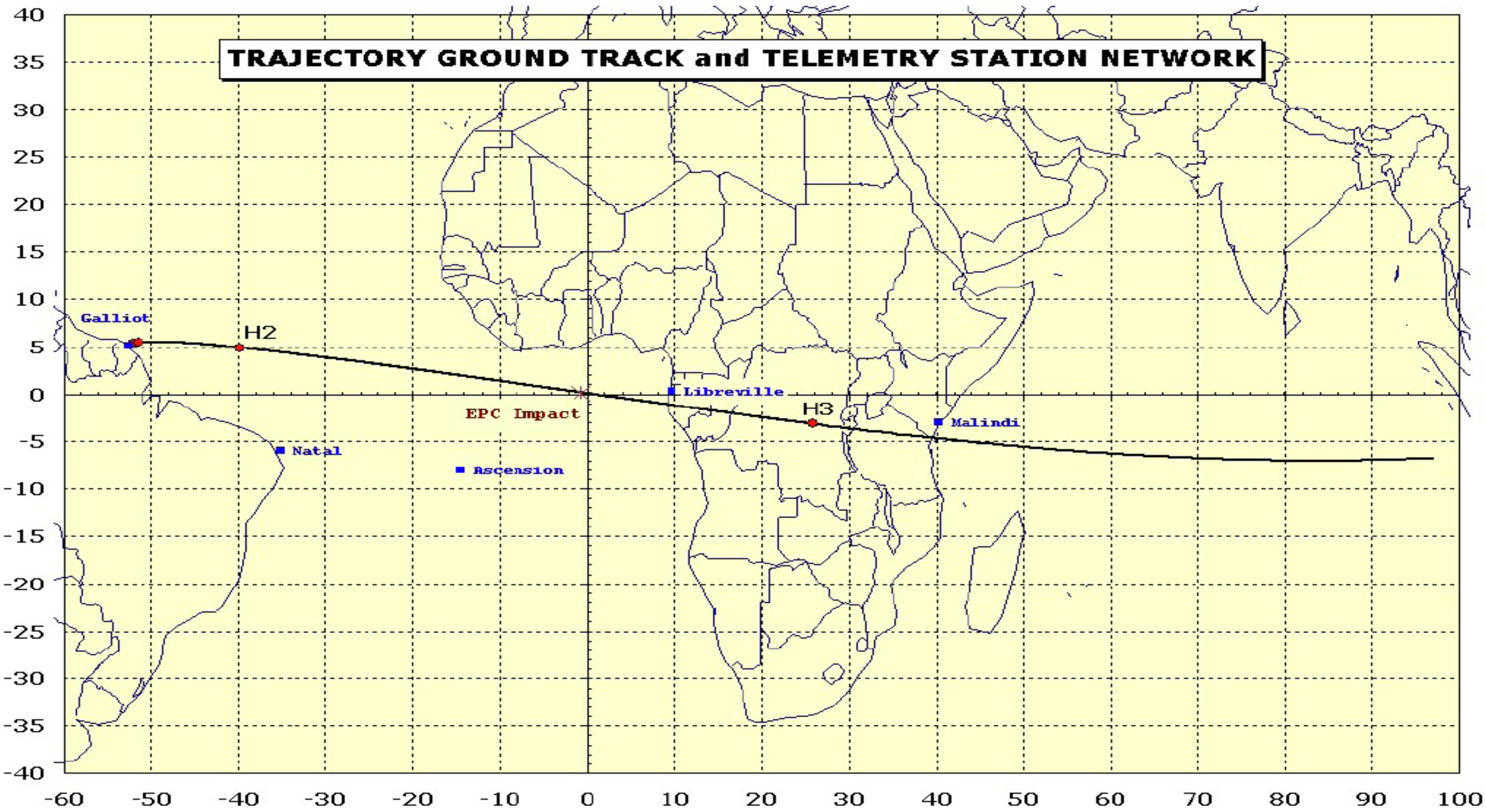
Mehrstufenprinzip



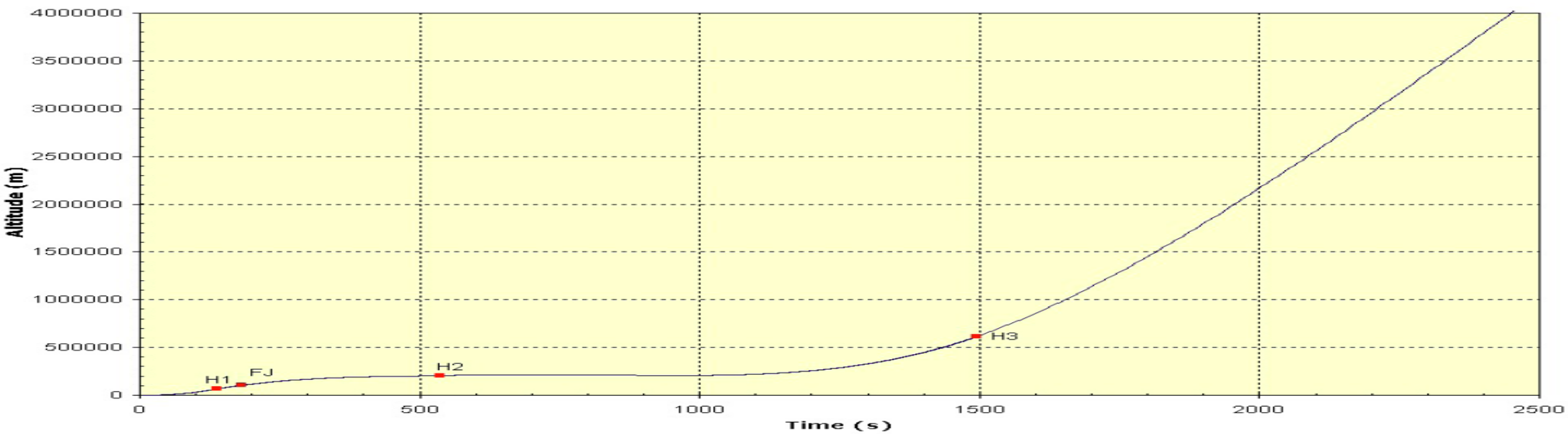
Trajectory Ariane 5 SSO Sun Synchronous Orbit

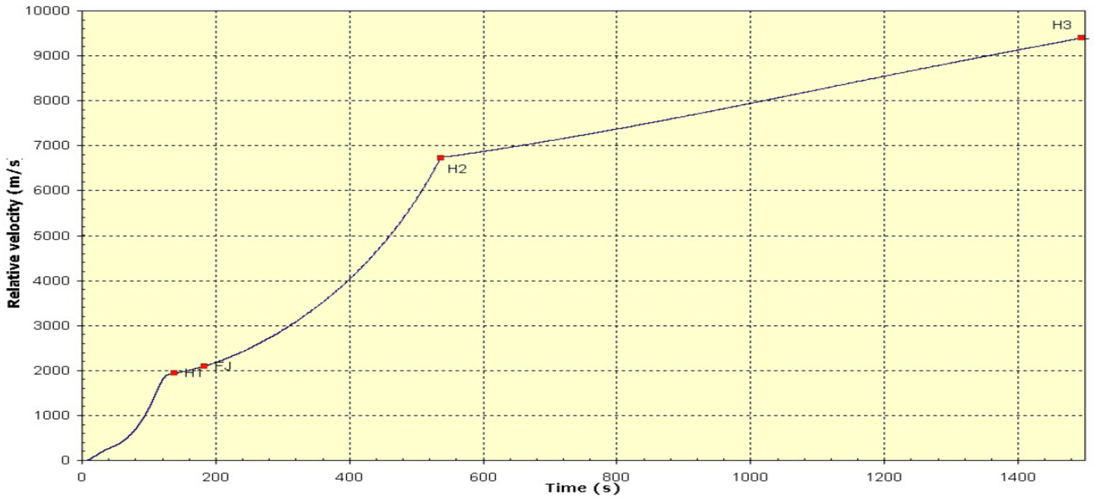


Missionsprofil Ariane 5 GTO Geostationary Transfer Orbit



Bahnhöhe/Geschwindigkeit Ariane 5 GTO

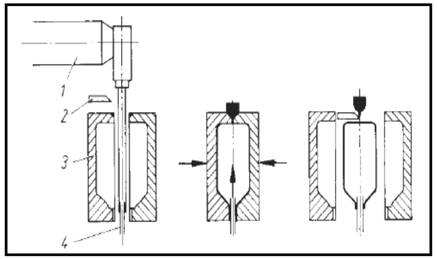


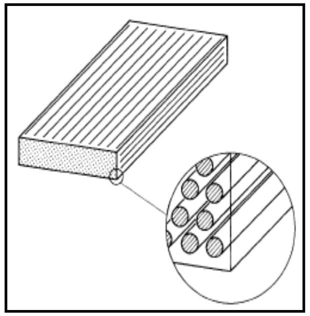


Kunststoff als Polymerwerkstoff

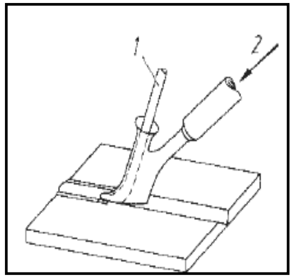
Verarbeitung

- **Urformen:**
  Spritzgießen, Pressen, Spritzpressen (alle Polymerwerkstoffe)
  Kalandrieren, Extrudieren, Blasformen (Thermoplaste)
  Schäumverfahren (alle Polymerwerkstoffe)
  Faserverstärkte Kunststoffe (alle Polymerwerkstoffe)





- **Umformen und Fügen:**
  Warmformen, Schweißen (Thermoplaste)
  Kleben (auch nicht polymere Werkstoffe)



Faserverstärkte Kunststoffe:
Verbundwerkstoff aus Polymerwerkstoff und Fasern
Matrixwerkstoff : Thermo-, Duroplaste, Elastomere
Fasern: Glas-, Kohlenstoff-, synthetische Faser (kurz/lang)
Vorteile: hohe Steifigkeit und Festigkeit bei niedriger Dichte
Nachteil: hoher Materialpreis und Verarbeitungsaufwand

FKV

Faser-Kunststoff-Verbund

Einfluss Temperatur, Feuchte und Klima

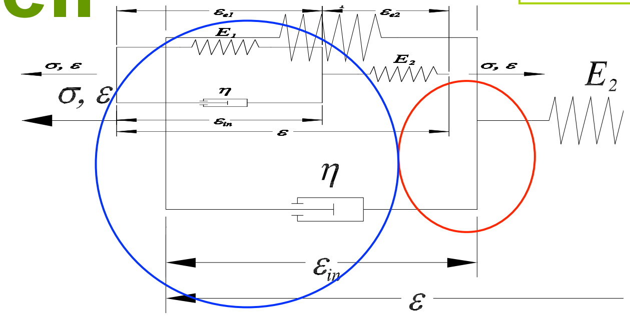
- **Temperatur:**
  primär Matrix betroffen
  Temperaturanstieg:
  Steifigkeit/Festigkeit sinken, Relaxation/Retardation beschleunigt

- **Feuchte:**
  primär Matrix betroffen
  moderate Feuchteaufnahme vorteilhaft (duktilere, Spannungsspitzen)
  Feuchtezunahme:
  Zunahme der Strukturmasse, Quellen,
  Relaxation/Retardation beschleunigt, Reduktion des Schubmoduls

- **Klima:**
  hohe Temperatur und Feuchtigkeit => Steifigkeit/Festigkeit sinken sehr stark

Dreiparameter Modell

Lineare Viskoelastizität



$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{e1} + \varepsilon_{e2}$$
$$= \varepsilon_{in} + \varepsilon_{e2}$$

- **Modell:**
  - **elastische Feder**
  - **Kelvin-Voigt Element**

- **Konstitutive Beziehung:**
  - **Kräftegleichgewicht**
  - **Kompatibilität**
  - **Materialgleichung (DGL)**

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_{e1} + \eta \dot{\varepsilon}_{in}, \; \dot{\varepsilon}_{in} = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_{e2} \text{ und } \varepsilon_{e2} = \frac{\sigma_2}{E_2}$$

$$\boxed{\dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta} \sigma = E_2 \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{E_1 \cdot E_2}{\eta} \varepsilon}$$

- **Lösungen:**
  - **lineare Viskoelastizität (analytische Lösung mit Ansatzfunktion und Anfangsbedingungen)**

$$e^{\frac{E_1 + E_2}{\eta}}, \; \sigma(t=0) = 0 \text{ und } \varepsilon(t=0) = 0$$

$$\boxed{\varepsilon(t) = \frac{1}{E_2}\sigma(t) + \int_0^t \frac{1}{E_1}\left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-s)}\right)\dot{\sigma}(s)\,ds}$$

- **Belastungsfunktionen:**
  - **Trapezform**
  - **Sprungfunktion**
  - **Exponentialfunktion**

Fraktionale lineare Viskoelastizität

- **lineare Materialgleichungen**

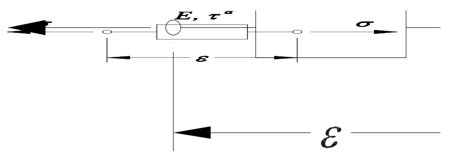
Elastizität: $\sigma = E \cdot \varepsilon$ **Viskosität:** $\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon}$ η **... Viskosität /Pa s**

- **durch fraktionale Ableitung ersetzt**

$$\sigma = E \cdot \tau^{\alpha} \cdot \frac{d^{\alpha}\varepsilon}{dt^{\alpha}} \qquad \alpha = \begin{cases} 0 \triangleq \text{Elastizität} \\ 1 \triangleq \text{Viskosität} \quad \tau = 1\text{s} \end{cases}$$

- **Fraktionale Differentiation:** $\dfrac{d^{\alpha} f}{dt^{\alpha}} = F_{-\alpha}(t) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \dot{f}(s)\,ds$

- **Fraktionales Element:**



$$\sigma(t) = E \cdot \tau^{\alpha} \cdot \frac{d^{\alpha}[\varepsilon(t)]}{dt^{\alpha}}$$

$$= \frac{E \cdot \tau^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \int_0^t (t-s)^{-\alpha} \cdot \dot{\varepsilon}(s)\,ds = \int_0^t G(t-s) \cdot \dot{\varepsilon}(s)\,ds$$

$$\boxed{G(t) = \frac{E}{\Gamma(1-\alpha)} \cdot \left(\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha}} \quad \boxed{J(t) = \frac{1}{E \cdot \Gamma(1+\alpha)} \cdot \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha}}$$

$\rightarrow$ **Potenzfunktionen**

Feuchterheologische einfache Stoffe

- **Feuchteabhängige Viskosität:**
  alle viskosen Dämpfer besitzen dieselbe Feuchteabhängigkeit
  Referenzfeuchte
  Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor

$$\eta(u) = \eta(u_0) \cdot a(u)$$

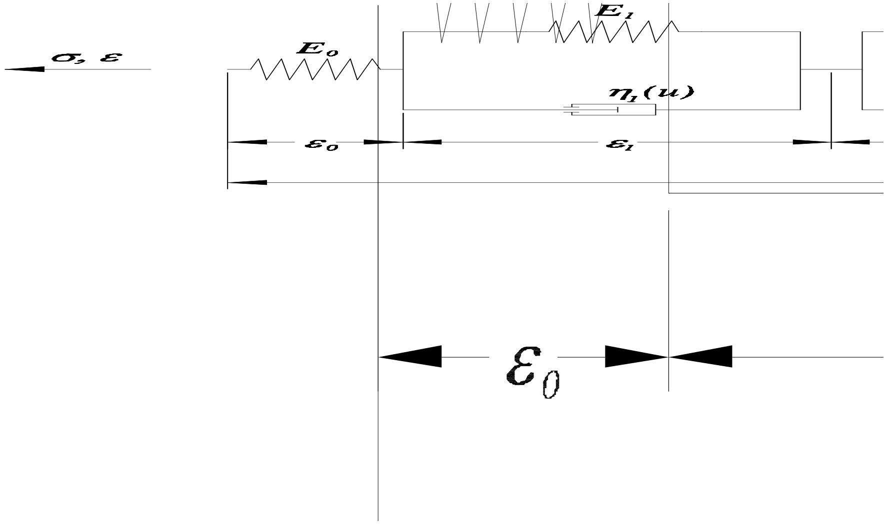
- **Feuchteabhängige Zeit:**
  reale Zeit *t*
  materialeigene Zeit *z*

$$dz = \frac{dt}{a[u(t)]} \quad \rightarrow \quad z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a[u(s)]}$$

- **Feuchteabhängige Modelle:**
  Dreiparameter Modell
  Verallgemeinerung

$$\sigma(z) = \int_0^{z(t)} G\left[z(t) - \varsigma(\vartheta)\right] \cdot \varepsilon'(\varsigma)\, d\varsigma$$

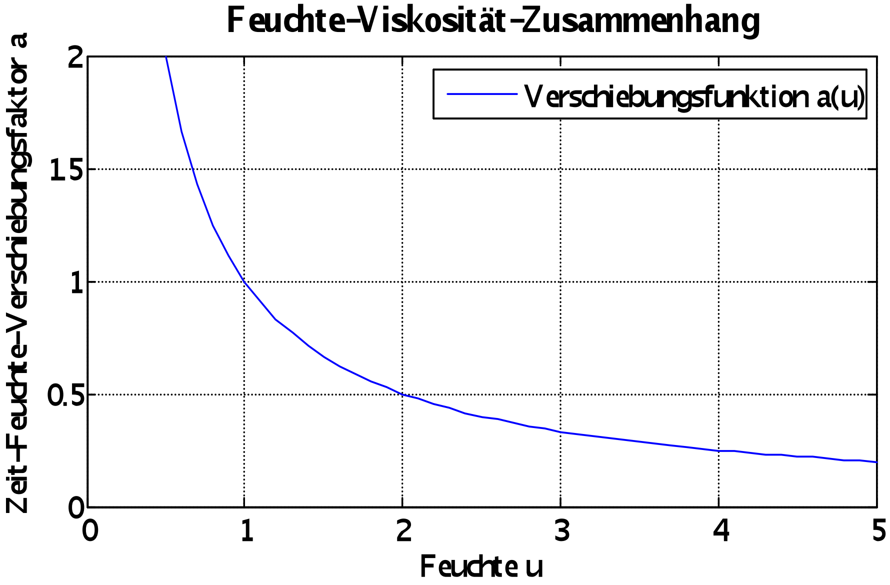
$$\varepsilon(z) = \int_0^{z(t)} J\left[z(t) - \varsigma(\vartheta)\right] \cdot \sigma'(\varsigma)\, d\varsigma$$



Feuchteabhängiger Zeitmaßstab

Zeit-Feuchte-Verschiebung

- **Materialeigene Zeit *z(t)*:**
  Differential
  Integral
- **Zeit-Feuchte-Verschiebungsfaktor *a(u)*:**
  (Funktion)
- **Einfluss der Materialfeuchte**
  Materialfeuchte *u(t)*
  Referenzfeuchte u_0



$$u(t) = u_0 \rightarrow a(u_0) = 1 \rightarrow z(t) = \int_0^t \frac{ds}{a(u_0)} = \frac{t}{a(u_0)} = t$$

materialeigene Zeit ist **gleich** der realen Zeit

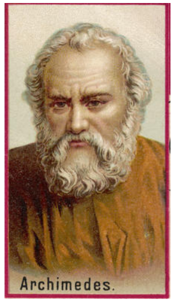
$$u(t) > u_0 \rightarrow a(u) < 1 \rightarrow z(t) = \frac{t}{a(u)} > t$$

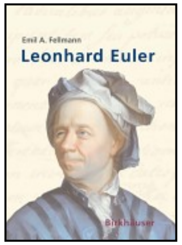
materialeigene Zeit läuft **schneller** als reale Zeit

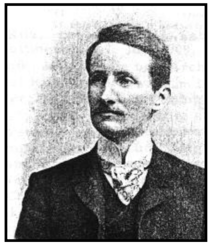
$$u(t) < u_0 \rightarrow a(u) > 1 \rightarrow z(t) = \frac{t}{a(u)} < t$$

materialeigene Zeit läuft **langsamer** als reale Zeit

Geschichte der FEM







Formale mathematische Entwicklung

- **Archimedes v. Syrakus (287 – 212 v. Chr.): Modell für Kreisumfang; unendlich viele Punkte der Kreislinie → 96-Eck, endlich (finite) Anzahl gerader Sehnenstücke (Elemente) → 3 10/71 < Pi < 3 1/7**
- **L. Euler (1743): Prinzip der kleinsten Wirkung (Entwicklung der Variationsrechnung)**
- **Ritz (1909): Lösung gewisser Variationsprobleme (globale Ansatzfunktionen)**
- **R. Courant (1943): Verfeinerung des Ritz'schen Verfahrens (lokale Ansatzfunktionen), Ansatzfunktionen je Element → Gleichungssystem mit entsprechend vielen Unbekannten (Lösungsproblem bei Handrechnung)**

Geschichte der FEM

Angewandte ingenieurmäßige Entwicklung:

- **Stabwerksstatik: KGV – WGV war um 1900 ausreichend entwickelt (Begrenzt durch Handrechnung ~ 10 Unbekannte)**
- **Matrixschreibweise (bis 1950): Übersichtliche Schreibweise bei Gleichungssystemen mit mehreren Unbekannten**
- **Digitales Rechenzeitalter: Umformulierung der herkömmlichen Berechnungsmethoden in ein rechnergeeignetes Format (Matrixschreibweise)**
- **Flugzeugbau: Gleichungssysteme mit ~ 50 Unbekannten; erste kommerzielle Anwendung (Boing – Flugzeugflügel)**
- **Stürmische Entwicklung: Strukturmechanik, Kontinuumsmechanik, Lösung von Feldproblemen (Temperaturfelder, Strömungsfelder, Magnetfelder), Akustik, etc.**